ÜBER SCHAREN NICHTLINEARER OPERATOREN

Walter R. Richert

München

1971

1972

ÜBER SCHAREN NICHTLINEARER OPERATOREN

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von
Walter R. Richert
aus München

München 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Hämmerlin

2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1972

TOP SERVICE GMBH, 8 München 22, Steinsdorfstr. 18

Inhaltsverzeichnis

Seite

EINLEITUNG 1

BEZEICHNUNGEN 9

KAPITEL I Einige Aussagen über die Eigenwertaufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ (A_i nichtlinearer Operator) 12

§1 OBER DIE ENTWICKLUNG VON ZWEIGEN VON LÖSUNGEN 13

1.1. Ober die Entwicklung von Zweigen von Lösungen in der Umgebung eines Nicht-Eigenwertes der linearisierten Aufgabe 14

1.2. Ober die Entwicklung von Zweigen von Lösungen in der Umgebung eines Eigenwertes der linearisierten Aufgabe 28

§2 OBER SCHAREN HOMOGENER OPERATOREN 40

2.1. Definition und einige Eigenschaften von Scharen homogener Operatoren 41

2.2. Scharen schwach stetiger homogener Operatoren in separablen Hilbert-Räumen 54

§3 ZUM VERZWEIGUNGSVERHALTEN VON SCHAREN NICHTLINEARER OPERATOREN 61

3.1. Zur Berechnung des Abbildungsgrades eines Vektorfeldes einer Abbildung vom Typ $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)A_i$ 62

3.2. Ober Verzweigungspunkte von Scharen nichtlinearer Operatoren 74

3.3. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines stetigen Zweiges 81

KAPITEL II Zur praktischen Bestimmung von Eigenwerten der Aufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ (A_i linearer Integraloperator) 87

§4 EINE FEHLERABSCHÄTZUNG FÜR AUFGABEN VOM TYP $\lambda^2 I - \lambda A - B$ 88

4.1. Darstellung einer Fehlerabschätzung für Aufgaben vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = o$ 89

4.2. Gewinnung einer Fehlerabschätzung, falls die Spektraldarstellung von B bekannt ist 94

4.3. Gewinnung einer Fehlerabschätzung, falls die Spektraldarstellung von B unbekannt ist 97

§5 EIN ERSATZKERNVERFAHREN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG DER EIGENWERTAUFGABE $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ 104

5.1. Darstellung des Verfahrens 105

5.2. Fehlerabschätzung für den Spezialfall $\lambda^2 I - \lambda A - B$ bei Anwendung der Näherungsmethoden aus 5.1. 112

5.3. Beispiele 129

LITERATURVERZEICHNIS 139

E I N L E I T U N G

Es gibt umfangreiche Theorien über das lineare Eigenwertproblem $(\lambda L - I)x = o$ mit linearem Operator L, über das nichtlineare Eigenwertproblem $(\lambda A - I)x = o$ mit nichtlinearem Operator A (siehe [1]), und über das Eigenwertproblem bei linearen Scharen $(I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i L_i)x = o$ mit linearen Operatoren L_i $(i = 1, \ldots, n)$. Da für viele Sätze aus der Theorie des linearen Eigenwertproblems entsprechende Aussagen über lineare Scharen aufgestellt werden konnten (siehe [9]), stellt sich die Aufgabe, Sätze aus der Theorie der nichtlinearen Eigenwertprobleme $(\lambda A - I)x = o$ auf Eigenwertaufgaben vom Typ $(g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i)x = o$ zu übertragen, wobei $g, g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und mindestens einer der Operatoren A_i nichtlinear ist. Abkürzend sprechen wir von $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ als Schar nichtlinearer Operatoren, wenn mindestens eine der Abbildungen A_i $(i = 1, \ldots, n)$ nichtlinear ist; damit wollen wir unterstreichen, daß noch eine spezielle Parameterabhängigkeit von λ vorausgesetzt wird. Wir sagen, λ_o sei Eigenwert der Schar nichtlinearer Operatoren, wenn es ein $x \neq o$ gibt, so daß $[g(\lambda_o)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)A_i]x = o$.

In der Praxis tritt ein solches Problem auf, wenn man einen einseitig eingespannten Träger am freien Ende be-

lastet. Ist das Trägheitsmoment bezüglich der in der Lastebene liegenden Achse genügend klein gegenüber dem größten Trägheitsmoment und steigert man die Last stetig, so wird der Stab vor Erreichen der Biegebruchlast nach der Seite abkippen. Für die Technik ist es wichtig diese Kipplast zu kennen. Die Berechnung der Kipplast bei Berücksichtigung des Gewichts des Trägers führt auf die Bestimmung des betragsgrößten Eigenwerts der Eigenwertaufgabe (Eigenwertparameter λ):

$$\varphi(s) + \lambda^2 \frac{1}{C} \int_0^1 G(s,t)t^2 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt +$$

$$+ \lambda \frac{g}{C} \int_0^1 G(s,t)t^3 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt +$$

$$+ \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)t^4 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt = 0 \ ;$$

dabei ist

$G(s,t)$ die Greensche Funktion des Problems,

$\varphi(t)$ die Verdrehung um die Stablängsachse an der Stelle t ,

C die Torsionssteifigkeit,

B die Biegesteifigkeit des Stabes bezüglich der Achse in der Lastebene.

Eine mögliche numerische Behandlung geben wir am Ende der

Arbeit als BEISPIEL IV an.
Wenn man nun B noch zusätzlich in Abhängigkeit von φ annimmt, dann betrachtet man das Eigenwertproblem zu einer Schar nichtlinearer Operatoren.

Die vorliegende Arbeit über Scharen nichtlinearer Operatoren gliedert sich in zwei große Kapitel. In Kapitel I befassen wir uns mit der genannten Aufgabe, Sätze aus der Theorie der nichtlinearen Eigenwertprobleme auf Scharen nichtlinearer Operatoren zu übertragen. In der Theorie der nichtlinearen Eigenwertprobleme gibt es Sätze, in deren Voraussetzungen für eine geeignete Stelle x_o Forderungen an die Kenntnis der Eigenwerte der linearen Eigenwertaufgabe $(\lambda DA(x_o) - I)x = o$ gestellt werden, wobei $DA(x_o)$ die Frêchet-Ableitung von A an der Stelle x_o bezeichne. Es zeigt sich in §1 und §3, daß, auch im Fall der Scharen nichtlinearer Operatoren, die Kenntnis der Eigenwerte des linearisierten Problems $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ ausgenützt werden kann. Aus diesem Grund haben wir uns in Kapitel II der Frage der Bestimmung der Eigenwerte solcher Scharen zugewandt, wenn die linearen Operatoren $DA_i(x_o)$ geeignete Integraloperatoren sind.

Wir geben nun eine Obersicht über die einzelnen Paragraphen.

In Kapitel I betrachten wir in §1, in Verallgemeinerung der Darstellung in [7], die Gleichung $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)(A_i+D_i)]x + f = o$ in einem Banach-Raum X, wobei die i.a. nichtlinearen Operatoren $A_i \in map(X,X)$ $(i = 1, \ldots, n)$ Bedingungen an die Fréchet-Ableitung erfüllen müssen, $D_i \in map(X,X)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gegen x_o hin abklingende Störungen sind und die g_i $(i=1, \ldots, n)$ in einer Umgebung von λ_o stetig sind. Wenn $f \in X$ ist und (λ_o , x_o) Lösungspaar der Gleichung $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)(A_i+D_i)]x + f = o$ ist, gibt es hinreichend kleine Umgebungen von λ_o und x_o, so daß zu jedem λ aus der Umgebung von λ_o ein eindeutig bestimmtes x aus der Umgebung von x_o mit $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)(A_i+D_i)]x+f = o$ existiert. Dabei muß noch vorausgesetzt werden, daß $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)DA_i(x_o)$ eine beschränkte Inverse besitzt, und das gilt für vollstetige A_i $(i = 1, \ldots, n)$, wenn λ_o nicht Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ ist. Für vollstetige A_i $(i = 1, \ldots, n)$ läßt sich auch der komplementäre Fall, daß λ_o Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ ist, behandeln.

In §2 betrachten wir sehr spezielle Scharen nichtlinearer Operatoren. Für alle $i = 1, \ldots, n$ sei A_i homogen vom Grad s_i. Dann betrachten wir die Schar $\lambda^n I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-1+(-i+1)s_i} A_i$. Es zeigt sich, daß in einem Banach-Raum eine Schranke für die Eigenwerte der Schar

existiert, deren Eigenelemente in einer Kugel um o mit Radius ρ liegen, wenn die A_i dort einer Lipschitz-Bedingung genügen. Wenn L der Rand eines beschränkten Gebietes im Banach-Raum ist, das die o enthält, und der Abbildungsgrad des Vektorfeldes $(I - A)L$ (mit vollstetigem A) von Eins verschieden ist, dann hat der Operator A mindestens einen Eigenvektor auf L, der zu einem positiven Eigenwert gehört. Für diesen Satz aus [1,p.186] und die dort angegebenen Theoreme 1.2., 1.3., 1.4. geben wir entsprechende Sätze für Scharen homogener Operatoren in endlichdimensionalen Banach-Räumen an. Es ist nicht gelungen mit einer Voraussetzung über den Abbildungsgrad der Schar homogener Operatoren auszukommen, sondern wir mußten eine Voraussetzung über den Abbildungsgrad eines Vektorfeldes in X^n machen, das wir aus der Schar ableiten. Die spezielle Form des Vektorfeldes hat uns veranlaßt, um eine Erweiterung auf separable Hilbert-Räume zu bekommen, auf eine Theorie von Borisovič für schwachstetige Vektorfelder zurückzugreifen.

In [1,p.196] wird folgender Satz angegeben: Für einen vollstetigen Operator A in einem reellen Banach-Raum, der an der Stelle o die Frêchet-Ableitung $DA(o)$ besitzt gilt: Jeder Eigenwert ungerader Vielfachheit der linearen Eigenwertaufgabe $I - \lambda DA(o)$ ist Verzweigungspunkt der nichtlinearen Aufgabe $I - \lambda A$, und zu diesem Verzweigungspunkt gehört ein stetiger Zweig von Eigen-

vektoren. Bei einer Verallgemeinerung auf Scharen nichtlinearer Operatoren in §3 erkennt man, daß man keine bedeutenden Einschränkungen an A_i und g_i stellen muß, um eine Behauptung vom Typ 3.1.7. und um weiter unter Voraussetzungen an den Abbildungsgrad, einen Satz mit der Behauptung vom Typ 3.3.1. angeben zu können. Diese Konzeption wurde von KLUGE für allgemeine Parameterabhängigkeit dargestellt (siehe [14]). Der Engpass tritt erst bei der Bestimmung von Voraussetzungen auf, die es gestatten, den Abbildungsgrad in der Behauptung von 3.1.7. explizit anzugeben. Für den Spezialfall $g_i(\lambda)=\lambda^{\alpha_i}$ oder $g_i(\lambda) = \operatorname{sign}(\lambda)\ \lambda^{\alpha_i}$ (α_i positiv) und unter zusätzlichen Bedingungen an die Operatoren $DA_i(o)$ gibt Satz 3.1.1. eine Möglichkeit, den Abbildungsgrad auszurechnen. Dieser Satz bildet die wesentliche Stütze für Satz 3.3.1., der ein Analogon zu dem Zitat aus [1.p.196] darstellt. Weiter zeigt sich für den Fall einer Schar nichtlinearer Operatoren mit stetigen g_i und vollstetigen A_i mit $A_i o = o$ und existenter Frêchet-Ableitung $DA_i(o)$, daß die Verzweigungspunkte stets Eigenwerte der Schar $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\ DA_i(o)$ sind. Dieser Sachverhalt gilt entsprechend für allgemeinere Abhängigkeit von λ (siehe [14]).

Wie sich in Kapitel I zeigte, ist es von Interesse, ein Verfahren zu kennen, mit dem sich die Eigenwerte der

Schar $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ berechnen lassen, da das zur Beschreibung des nichtlinearen Problems $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i$ dienlich sein kann. Die numerischen Verfahren auf diesem Gebiet gelten als wenig entwickelt. P.H.MÜLLER hat das Problem aufgestellt, eine Fehlerabschätzung für sein verallgemeinertes Abschnittsverfahren anzugeben ([15]). Wir haben in §4 für den Aufgabentyp $\lambda^2 I - \lambda A - B$, unter speziellen Voraussetzungen an die linearen Operatoren A und B, eine Konstruktion zu Fehlerabschätzungen angegeben, die es ermöglicht, den Abstand der jeweiligen Eigenwerte eines Näherungssystems zu denen des ursprünglich gegebenen Problems durch eine einzige Konstante abzuschätzen. Es hat sich in §5 gezeigt, daß sich das Ersatzkernverfahren, wie es von HÄMMERLIN vorgeschlagen wurde (siehe [13]), auf den Fall $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, L_i$ (L_i ($i = 1, \ldots, n$) lineare Integraloperatoren) verallgemeinern läßt. Unter Verwendung der praktikablen Schranken von HÄMMERLIN ist es möglich, die Forderungen zu erfüllen, die wir in §4 an die Näherungssysteme stellen mußten. Die hier angegebenen Schranken sind jedoch, im Gegensatz zu jenen von HÄMMERLIN, nur mit dem Einsatz einer elektronischen Rechenanlage zu berechnen.

Allen die mir am Zustandekommen dieser Arbeit geholfen haben, möchte ich hiermit meinen Dank aussprechen. Für

seine umsichtige Förderung darf ich mich bei Herrn Professor Dr. HÄMMERLIN bedanken; seinem Interesse an der Fragestellung verdanke ich viele konstruktive Diskussionsbeiträge.

Bezeichnungen

$f \in U$	f ist Element der Menge U.
$U \subseteq V$	U ist Teilmenge von V.
$\cap$	Durchschnitt
$\cup$	Vereinigung
$\bigwedge_{f \in U} : \ldots$	für jedes $f \in U$ gilt: ... .
$\bigvee_{f \in U} : \ldots$	es gibt ein $f \in U$, so daß ... .
$^1\bigvee_{f \in U} : \ldots$	es gibt ein eindeutig bestimmtes $f \in U$, so daß gilt: ... .
$\{f \in U \mid \ldots\}$	Menge aller Elemente $f \in U$ mit ... .
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.
$\mathbb{R}_+^*$	Menge der positiven reellen Zahlen.
$\mathbb{R}^{n,n}$	Menge der $n \times n$ – Matrizen über $\mathbb{R}$.
$C(G, \mathbb{R})$	Menge der stetigen Abbildungen von G nach $\mathbb{R}$.
$\mathrm{con}(x_1, \ldots, x_n)$	konvexe Hülle der Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eines Vektorraumes.
$\mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n)$	lineare Hülle der Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eines Vektorraumes.
ΔM	Diagonale $\{(x,y) \in M \times M \mid x = y\}$ der Menge M.
M^a	abgeschlossene Hülle der Teilmenge M eines topologischen Raumes.
∂M	Rand der Teilmenge M eines topologischen Raumes.

M^n	n-faches kartesisches Produkt der Menge M .
$(X^n , \mathbb{R})$	Produktvektorraum des Vektorraumes $(X , \mathbb{R})$.
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge von X .
$map(X , Y)$	Menge der Abbildungen von X nach Y.
χ_M	Charakteristische Funktion der Teilmenge M von X .
$d[I-T, \partial G, o]$	Abbildungsgrad des Vektorfeldes $(I-T)\partial G$ für vollstetige Operatoren T und offene Mengen G eines Banach-Raumes, auf deren Rand kein Fixpunkt von $I-T$ liegt.
$index(I-T; x_o)$	Abbildungsindex des isolierten Fixpunktes x_o der Abbildung $I-T$, für vollstetige Operatoren T .
$\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{R}(T)$	Definitionsbereich, Wertebereich des Operators T .
$N(T)$	Nullraum des linearen Operators T .
$\mathfrak{B}(X , X)$	Menge der beschränkten linearen Operatoren in einem Banach-Raum X .
$\mathfrak{B}_o(X , X)$	Menge der vollstetigen linearen Operatoren in einem Banach-Raum X .
ONS	Orthonormalsystem
VONS	vollständiges Orthonormalsystem
I	Identische Abbildung
el	für Mengen X sei el die Abbildung $\{\{x\} \in \mathcal{P}(X) \mid x \in X\} \longrightarrow X$ $\{x\} \longrightarrow x$.

$DA(x_o)$	Fréchet-Ableitung des Operators A an der Stelle x_o .
$ev(\lambda)$	Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Sehr häufig bezeichnen wir den Operator $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ als Eigenwertaufgabe und meinen damit die folgende Aufgabe: Zu gegebenen $g_i \in map(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und Operatoren A_i eines Banach-Raumes X in sich wird nach $\lambda_o \in \mathbb{R}$ gefragt, für die ein $x_o \in X\backslash\{o\}$ existiert, so daß $[g(\lambda_o)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)A_i]x_o = o$ gilt. Dann nennen wir λ_o Eigenwert der Eigenwertaufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$, und x_o einen dazugehörigen Eigenvektor.

K A P I T E L I

EINIGE AUSSAGEN ÜBER DIE EIGENWERTAUFGABE

$g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ (A_i nichtlinearer Operator)

§ 1 OBER DIE ENTWICKLUNG VON ZWEIGEN VON LÖSUNGEN

Diesem Paragraphen liegt folgende Problemstellung zugrunde:

Bei gegebenen

$$g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$B_i : X \to X \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (X \text{ Banach-Raum})$$

$$f \in X$$

existiere ein Lösungspaar (λ_o, x_o) der Aufgabe $[I - \Sigma g_i(\lambda)B_i](x) + f = o$ (d.h. es gilt $[I - \Sigma g_i(\lambda_o)B_i](x_o) + f = o$). Wir setzen hier $g(\lambda) := 1$.

Es wird nach Bedingungen dafür gefragt, daß kleine Umgebungen $U(\lambda_o)$, $V(x_o)$ existieren, so daß für jedes $\lambda \in U(\lambda_o)$ eine Lösung $x \in V(x_o)$ existiere.

Wir trennen den folgenden Paragraphen in zwei Abschnitte: Im ersten wird im wesentlichen der Fall: λ_o ist nicht Eigenwert des linearisierten Problems, im zweiten der Fall, daß λ_o Eigenwert des linearisierten Problems ist, dargestellt.

1.1. Über die Entwicklung von Zweigen von Lösungen in der Umgebung eines Nicht-Eigenwertes der linearisierten Aufgabe

Unter den Voraussetzungen 1.1.1., insbesondere durch die Forderung $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \in \mathfrak{B}(X,X)$, ergibt sich in Satz 1.1.6. grob gesprochen das Ergebnis: Es existieren Konstanten c, $d > o$ so, daß für $\delta \in \mathbb{R}$ mit $|\delta| < c$ ein eindeutig bestimmtes Element $h \in X$ mit $\|h\| \leq d$ und $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)](x_o+h) + f = o$ existiert.

Voraussetzung 1.1.1.

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{R}$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|$;

(2) $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$ $(i=1, \ldots, n)$ seien beschränkt stetig - frêchetdifferenzierbar und es gelte $A_i\, o = o$;

(3) $D_i \in \mathrm{map}(X,X)$ $(i=1, \ldots, n)$;

(4) $g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(i=1, \ldots, n)$;

(5) $f \in X$;

(6) Es sei $\lambda_o \in \mathbb{R}$, $x_o \in X$ gegeben mit
$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)(A_i+D_i)](x_o) + f = o;$$

(7) $$\bigvee_{U(x_o)} : \bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \bigvee_{\substack{q_i:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+ \\ \lim_{x\to o} q_i(x)=o}} :$$

$$\bigwedge_{x,y\in U(x_o)} : \|D_i x - D_i y\| \le q_i(\max\{\|x-x_o\|, \|y-x_o\|\})\, \|x-y\|;$$

(8) $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \in \mathfrak{B}(X,X)$;

(9) Sei $\varepsilon > o$ so gegeben, daß $g_i\big|_{[\lambda_o-\varepsilon,\lambda_o+\varepsilon]}$ $(i=1, \ldots, n)$ stetig.

Bezeichnung 1.1.2.

Unter der Voraussetzung 1.1.1. (1) - (4) schreiben wir für alle $i=1, \ldots, n$
$R_i(x_o,h) := A_i(x_o + h) - A_i(h) - DA_i(x_o)h$ und damit

$$F : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

$$(\delta,h) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)\, R_i(x_o+h)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (g_i(\lambda_o+\delta) - g_i(\lambda_o))(A_i(x_o) + DA_i(x_o)h)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)\, D_i(x_o+h) - g_i(\lambda_o)\, D_i(x_o) ;$$

Lemma 1.1.3.

Unter Voraussetzung 1.1.1. und der Bezeichnung 1.1.2. gilt:

$$\bigwedge_{\substack{\delta\in\mathbb{R}\\ h\in X}} \left(\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i) \right](x_o+h) + f = 0 \iff \right.$$

$$\left. \iff h = \left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o) \right]^{-1} F(\delta,h) \right) .$$

Beweis:

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)](x_o+h) + f = o \iff$$

1.1.1.(2)

$$x_o + h - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\Big(A_i(x_o) + DA_i(x_o)h + R_i(x_o+h)\Big)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \Big(g_i(\lambda_o+\delta) - g_i(\lambda_o)\Big)\Big(A_i(x_o)+DA_i(x_o)h+R_i(x_o,h)\Big)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)\, D_i(x_o+h) + f = o \iff$$

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)(A_i+D_i)](x_o) + f + [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)DA_i(x_o)]h =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, R_i(x_o,h) + \sum_{i=1}^{n} \Big(g_i(\lambda_o+\delta) - g_i(\lambda_o)\Big)\Big(A_i(x_o) +$$

$$+ DA_i(x_o)h + R_i(x_o,h)\Big) + \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)\, D_i(x_o+h) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, D_i(x_o) \iff$$

1.1.1.(6),(8)

$$h = [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1}F(\delta,h)\ ;$$

(i) $\|h_1\| \to 0 \ , \ \|h_2\| \to 0 \Rightarrow a_i(h_1,h_2) \to 0$

(ii) $\bigwedge_{h_1,h_2 \in X} : \|R_i(x_0,h_1) - R_i(x_0,h_2)\| \leq$

$\leq a_i(h_1,h_2)\|h_1-h_2\| \ .$

Wenn wir also jetzt

$A : \mathbb{R} \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$(\delta, h_1, h_2) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |g_i(\lambda_0+\delta)| \Big(|a_i(h_1,h_2)| +$

$+ q_i \ (\max[\|h_1\|,\|h_2\|]) \Big) + |g_i(\lambda_0+\delta) -$

$- g_i(\lambda_0)| \ \|DA_i(x_0)\|$

so festlegen, dann gilt (2).

(1) gilt wegen der Anmerkung über a_i und Vor.1.1.1.(7), (9) .

Lemma 1.1.5.

Mit Voraussetzung 1.1.1. und Bezeichnung 1.1.2. gilt:

$\bigvee_{\substack{c>0 \\ d>0}} : \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R}, h \in X \\ |\delta| < c \\ |h| \leq d}} :$ Die Abbildung $H : X \longrightarrow X$

$h \longmapsto [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0)DA_i(x_0)]^{-1}F(\delta,h)$

hat die Eigenschaften (i) und (ii):

(i) $H(\{h \in X \mid \|h\| \leq d\}) \subseteq \{h \in X \mid \|h\| \leq d\}$

(ii) $H\big|_{\{h \in X \mid \|h\| \leq d\}}$ ist kontrahierend.

Beweis:

Betrachtung für (ii):

Mit $\hat{c} > 0$, $\hat{d} > 0$ bezeichnen wir zwei Konstanten, die die Eigenschaft haben:

$$\bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R},\ h_1,\ h_2 \in X \\ |\delta| < \hat{\hat{c}} \\ \|h_1\|,\ \|h_2\| \leq \hat{\hat{d}}}} : A(\delta, h_1, h_2) \leq \left\| \left[2\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0)\, DA_i\,(x_0) \right]^{-1} \right]^{-1} \right\| ,$$

und deren Existenz nach Lemma 1.1.4.(1) gegeben ist. Nach Lemma 1.1.4.(2) gibt es dann zu $\hat{c}$ und $\hat{d}$ eine Konstante $q < 1$ so, daß für h_1 , $h_2 \in X$ mit $\|h_1\|$, $\|h_2\| \leq \hat{d}$ gilt: $\|H(h_1) - H(h_2)\| \leq q\|h_1 - h_2\|$.

Betrachtung für (i):

$$s := 5\left\| \left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0)\, DA_i\,(x_0) \right]^{-1} \right\| ;$$

Wir definieren 6 Größen:

$$C_1 := \left(s \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \sup_{\substack{\delta \\ |\delta| \leq \varepsilon}} \left| g_i\,(\lambda_0+\delta) \right| \right)^{-1};$$

$$C_2(\lambda) := \lambda \left(s \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \left(\|A_i(x_0)\| \right) \right)^{-1} \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$C_3 := \left(s \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \|DA_i(x_0)\| \right)^{-1}$$

$$C_4 := \left(2s \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \sup_{\substack{\delta \\ |\delta| \leq \varepsilon}} | g_i(\lambda_0+\delta) - g_i(\lambda_0)| \right)^{-1}$$

$$C_5(\lambda) := \lambda \left(2s \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \| D_i (x_0) \| \right)^{-1} \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$C_6 := \left(s \cdot \max_{i=1,\ldots,m} | g_i(\lambda_0)| \right)^{-1}$$

Sei nun $\hat{d} > 0$ so gewählt, daß gilt

$$\hat{d} \leq \hat{\hat{d}}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\|R_i(x_0,h)\|}{\|h\|} < C_1 \quad \text{für} \quad \|h\| \leq \hat{d} \quad \text{und} \quad h \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(\|h\|) < \min[C_4, C_6] \quad \text{für} \quad \|h\| \leq \hat{d} \quad \text{und} \quad h \neq 0 .$$

(Existenz von $\hat{d}$ trivial denn $\hat{\hat{d}} > 0$ und Vor.1.1.1. (2),(7).)

Sei nun $\hat{c} > o$ so gewählt, daß gilt

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| < \min [C_2(\hat{d}), C_3, C_5(\hat{d})]$$

(Existenz von $\hat{c}$ trivial nach Vor. 1.1.1.(9).)

Dann gelten für alle δ , h mit ($|\delta| < \hat{c}$, $\|h\| \leq d$, $h \neq o$) die folgenden 6 Ungleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g_i (\lambda_o+\delta) \right| \frac{\|R_i(x_o,h)\|}{\|h\|} < s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \, \|A_i(x_o)\| < \hat{d} \cdot s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \, \|DA_i(x_o)\| < s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \, q_i (\|h\|) < (2s)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \, \|D_i x_o\| < \hat{d}(2s)^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o) | q_i (\|h\|) < s^{-1}$$

Dann gelten für alle δ , h mit ($|\delta| < \hat{c}$, $\|h\| \leq d$) die folgenden 5 Ungleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) | \, \|R_i(x_o,h)\| < \hat{d}\, s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \; \|A_i(x_o)\| < \hat{d}\, s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \; \|DA_i(x_o)\| \; \|h\| < \hat{d}\, s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o+\delta) - g_i (\lambda_o)| \; \|D_i(x_o+h)\| < \hat{d}\, s^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} | g_i (\lambda_o)| \; \|D_i(x_o+h) - D_i(x_o)\| < \hat{d}\, s^{-1}$$

Dann gilt mit Bezeichnung 1.1.2.:

Für alle δ , h mit $|\delta| < \hat{c}$ und $\|h\| \le d$ gilt:

$\|F(\delta,h)\| \le \hat{d}\, s^{-1}$ bzw.

$$\|[I - \sum_{i=1}^{n} g_i (\lambda_o)\, DA_i (x_o)]^{-1} F(\delta,h)\| < \hat{d} .$$

Wenn man also jetzt definiert $d := \hat{d}$ und
$c := \min[\hat{c},\hat{\hat{c}}]$ ist Lemma 1.1.5. bewiesen.

Satz 1.1.6.

Mit den Voraussetzungen 1.1.1. gilt:

(i) $\bigvee_{c,d > o} : \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ |\delta| < c}} : {}^{1}\bigvee_{\substack{h \in X \\ \|h\| \le d}} :$

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i (\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)](x_o+h) + f = o ;$$

(ii) $\bigvee_{c,d > o} : \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R}, h \in X \\ |\delta| < c \\ \|h\| \le d}} :$

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i (\lambda_o+\delta) DA_i (x_o+h)]^{-1} \in \mathcal{B}(X,X);$$

(iii) Mit c,d von (i) gilt: Die Abbildung

$$\Phi : \{\delta \in \mathbb{R} \mid |\delta| < c\} \longrightarrow \{h \in X \mid \|h\| \le d\}$$

$$\delta \mapsto \text{el } \{h \in X \mid \|h\| \le d ;$$

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i (\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)] (x_o+h) + f = o\}$$

ist stetig und sie hat die Eigenschaft

$$\lim_{\delta \to o} \Phi(\delta) = o .$$

Beweis:

Teil (i): Nach Lemma 1.1.5. gilt mit dem Banachschen Fixpunktsatz

$$\bigvee_{\substack{c > o \\ d > o}} : \bigwedge_{\substack{\delta \in \mathbb{R} \\ |\delta| < c}} : {}^{1}\bigvee_{h \in X, \|h\| \le d} : H(h) = h$$

Nach Lemma 1.1.3. ist das äquivalent zu (i).

Teil (ii):

$$\| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)] -$$

$$-[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)\, DA_i(x_o+h)] \| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \| g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o) - g_i(\lambda_o+\delta)\, DA_i(x_o+h) \|$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,n} [|g_i(\lambda_o)|] \sum_{i=1}^{n} \| DA_i(x_o) - DA_i(x_o+h) \|$$

$$+ \max_{i=1,\ldots,n} [\sup_{\substack{h \in X \\ \|h\| \leq d}} \| DA_i(x_o+h) \|] \sum_{i=1}^{n} |g_i(\lambda_o) - g_i(\lambda_o+\delta)|$$

(nach Vor. 1.1.1.(2)).
Man kann also jetzt $c > o$ $d > o$ so wählen, daß die letzte Summe der Ungleichungskette

$$\leq \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \| \quad \text{ist.}$$

Teil (iii):

$$\| \Phi(\delta) - \Phi(\delta^*) \| \leq$$

$$\leq \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} (F(\delta,\Phi(\delta)) - F(\delta^*,\Phi(\delta))) \|$$

$$+ \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} (F(\delta^*,\Phi(\delta)) - F(\delta^*,\Phi(\delta^*))) \|$$

$$\leq \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \| .$$

$$\| F(\delta,\Phi(\delta)) - F(\delta^*,\Phi(\delta)) \| + \tfrac{1}{2} \| \Phi(\delta) - \Phi(\delta^*) \|$$

(nach Lemma 1.1.5. Bew.(ii); $\delta,\delta^* < c$) .

Dann gilt mit Bezeichnung 1.1.2.

$$\| \Phi(\delta) - \Phi(\delta^*) \| \leq 2 \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \| \cdot$$

$$\cdot \Big[\sum_{i=1}^{n} | g_i(\lambda_o+\delta) - g_i(\lambda_o+\delta^*) | \Big(\|R_i(x_o,\Phi(\delta))\| +$$

$$+ \|A_i(x_o)\| + \|DA_i(x_o)\Phi(\delta)\| + \|D_i(x_o+\Phi(\delta))\| \Big) \Big] \leq$$

Mit den Konstanten von Beweis zu Lemma 1.1.5. gilt weiter

$$\leq 2 \| [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)]^{-1} \| \cdot$$

$$\cdot \Big[\sum_{i=1}^{n} | g_i(\lambda_o+\delta) - g_i(\lambda_o+\delta^*) | \Big(\quad d\, C_1 +$$

$$+ \| A_i(x_o) \| + \|DA_i(x_o)\|\, d + \quad d \min [C_4,C_6] +$$

$$+ \| D_i(x_o) \| \Big) \Big] .$$

Aus Vor. 1.1.1.(9) folgt dann die Stetigkeit von Φ und die Limesbeziehung.

Wir haben in der Überschrift zum ersten Abschnitt dieses Paragraphen versprochen Umgebungen von Nicht-Eigenwerten zu betrachten; wir merken im folgenden Lemma an, daß wir weniger verlangten:

Lemma 1.1.7.

Unter den Voraussetzungen 1.1.1. und A_i (i=1, ..., n) vollstetig gilt: Falls λ_o kein Eigenwert von

$$I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\ DA_i(x_o)$$ ist, folgt

$$(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\ DA_i(x_o))^{-1} \in \mathcal{B}(X,X)\setminus\{o\} .$$

Beweis:

Wegen A_i (i=1, ..., n) vollstetig sind $DA_i(x_o)$ (i=1, ..., n) vollstetig nach [1,p.135]; also gilt nach der Fredholmschen Alternative:

$$\bigwedge_{y \in X} :: \bigvee^{1}_{x \in X;} : [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\ DA_i(x_o)]x = y .$$

[2, p.167] liefert dann die Behauptung.

Mit dem vorangegangenen Lemma haben wir eine angenehme hinreichende Bedingung für Vor. 1.1.1.(8), da die Voraussetzung, daß λ_o ein Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)DA_i(x_o)$ ist, numerisch nachprüfbar ist.

1.2. Über die Entwicklung von Zweigen von Lösungen in der Umgebung eines Eigenwertes der linearisierten Aufgabe

Am Ende des vorigen Abschnitts haben wir darauf hingewiesen, daß die Bedingung, λ_o sei kein Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$, hinreichend für Vor. 1.1.1. (8) ist, wenn man die Anwendbarkeit der Fredholmschen Alternative absichert; die komplementäre Voraussetzung, λ_o sei Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$, soll in diesem zweiten Abschnitt des Paragraphen getroffen werden.

In 1.2.11. geben wir die Beschreibung einer Klasse von Scharen nichtlinearer Operatoren, für die $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte hat.

Voraussetzung 1.2.1.

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über dem Körper $\mathbb{R}$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|$; $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$ vollstetig, beschränkt stetig differenzierbar mit $A_i\, o = o$;

(3) $\cdot \bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $D_i \in \mathrm{map}(X,X)$;

(4) $\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(5) $f \in X$;

(6) Es sei $\lambda_o \in \mathbb{R}$ und $x_o \in X$ gegeben mit

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\,(A_i+D_i)]\, x_o + f = o \ ;$$

(7) $\bigvee_{U(x_o)}$: $\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $\bigvee_{\substack{q_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \\ \text{mit} \\ \lim_{x\to o} q_i(x)=o}}$:

$$\bigwedge_{x,y} \Big(x,y \in U(x_o) \Rightarrow \|D_i x - D_i y\| \le q_i\,(\max[\|x-x_o\|,\|y-x_o\|])\,\|x-y\| \Big) \ ;$$

(8) λ_o sei Eigenwert von

$$I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o) \ ;$$

(9) Sei $\varepsilon > 0$ so gegeben, daß

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : g_i \Big|_{[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]} \text{ stetig ist.}$$

Definition 1.2.2.

$A : X \to Y$ sei eine abgeschlossene lineare Abbildung eines Banach-Raumes X in einen Banach-Raum Y. Dann heißt $P : \mathcal{R}(A) \to X$ Pseudoinverse zu A, wenn P ein beschränkter linearer Operator ist, mit :

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{R}(A)} : APx = x .$$

Lemma 1.2.3.

Mit Voraussetzung 1.2.1.(1),(2) gilt:

$$\bigwedge_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ x \in X}} : I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x) \text{ besitzt eine Pseudoinverse.}$$

Beweis:

1.2.1.(2) folgt:

$$\bigwedge_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ x \in X}} : \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x) \in \mathcal{B}_0(X,X) \text{ nach [1,p.135].}$$

Dann gilt: $\mathcal{R}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x))$ ist abgeschlossen und $N(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x))$ ist endlichdimensional [d.h. es existiert eine Projektion von X auf $N\left(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x)\right)$]. Dann folgt: $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x)$ besitzt eine Pseudoinverse nach [3,p.72].

Bezeichnung 1.2.4.

Unter Voraussetzung 1.2.1. bezeichnen wir:

mit P die Pseudoinverse von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)$;

mit E die Projektion von X auf $\mathcal{R}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o))$; mit $\overline{P}: X \longrightarrow X$, $x \longrightarrow P E x$ die erweiterte Pseudoinverse;

mit Bezeichnung 1.1.2. definieren wir für alle $u \in X$ eine Abbildung $H: X \longrightarrow X$, $x \longmapsto \overline{P} F(\delta, x) + u$.

Bemerkung:

Die zweite Bezeichnung ist sinnvoll, da

$\sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o) \in \mathcal{B}_o(X,X)$ gesichert ist, woraus folgt: Codimension von $\mathcal{R}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o))$ ist endlich.

Satz 1.2.5.

Unter den Voraussetzungen 1.2.1. und Bezeichnung 1.2.4. gilt:

(i) $\bigvee_{c,d,e>0} : \bigwedge_{\substack{\delta\in\mathbb{R},\, u\in X \\ |\delta|<c \\ \|u\|<e}} : {}^{1}\!\bigvee_{\substack{h\in X \\ \|h\|\le d}} : Hh = h$;

(ii) Mit c, d, e von (i) gilt: Für alle $u \in X$ mit $\|u\| < e$ ist die Abbildung

$$\Phi(\cdot,u) : \{\delta \in \mathbb{R} \mid |\delta| < c\} \longrightarrow \{h \in X \mid \|h\| \le d\}$$

$$\delta \longmapsto e1\{h \in X \mid \|h\| \le d;\ H(h) = h\}$$

stetig.

Beweis:

(i) Mit $\hat{c}$, $\hat{d} > o$ bezeichnen wir zwei Konstanten, die die Eigenschaft haben:

$$\bigwedge_{\substack{\delta\in R;h_1,h_2\in X \\ |\delta| < \hat{\hat{c}} \\ \|h_1\|,\|h_2\|\le\hat{d}}} : A(\delta, h_1, h_2) \le (2\,\|\overline{P}\|)^{-1}$$

und deren Existenz nach Lemma 1.1.4.(1) gegeben ist. Mit der Bezeichnung 1.2.4. gilt:

$$\|H(h_1) - H(h_2)\| \le \|\overline{P}\|\ \|F(\delta,h_1) - F(\delta,h_2)\| .$$

Nach Lemma 1.1.4.(2) gibt es dann zu $\hat{\hat{c}},\hat{\hat{d}}$ eine Konstante $q < 1$ so, daß für $h_1, h_2 \in X$ mit $\|h_1\| , \|h_2\| \le \hat{\hat{d}}$ gilt:

$$\|H(h_1) - H(h_2)\| \le q\|h_1 - h_2\| .$$

Wie im Beweis von Lemma 1.1.5. sieht man die Existenz von $\hat{d}$, $\hat{c} > o$ mit $\hat{d} \le \hat{\hat{d}}$, und

$$\|F(\delta,h)\| < \hat{d}(2\|\overline{P}\|)^{-1} \quad \text{falls} \quad |\delta| < \hat{c} \quad \text{und} \quad \|h\| \le \hat{d} .$$

Dann setzt man $c := \min[\hat{c},\hat{\hat{c}}]$, $d := \hat{d}$, $e := \hat{d} \cdot 2^{-1}$ und bekommt damit $\|H(h)\| = \|\overline{P}F(\delta,h) + u\| \le d$. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert die Behauptung (i) .

(ii) Verläuft wie Beweis von Satz 1.1.6.(iii).

Satz 1.2.6.

Unter den Voraussetzungen 1.2.1. und Bezeichnungen 1.2.4. gilt: Für c, d, e von Satz 1.2.5. gilt (i) und (ii) :

(i) Für $\delta \in \mathbb{R}$, $u \in N\left(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)\right)$ mit $|\delta| < c$ und $\|u\| < e$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\delta,u) &= \overline{P}\, F(\delta,\Phi(\delta,u)) + u \\ (I - E)\, F(\delta,\Phi(\delta,u)) &= o \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)\right]\left(x_o+\Phi(\delta,u)\right) + f = o\ ;$$

(ii) Für $\delta \in \mathbb{R}$, $h \in X$ mit $|\delta| < c$ und $\|h\| \le d$ gilt:

$$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)\right](x_o+h) + f = o \Longrightarrow$$

$$\bigvee_{u \in N\left(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) DA_i(x_o)\right)} : \quad h = \overline{P}\, F(\delta,h) + u$$

und $(I - E)\, F(\delta,h) = o$.

Beweis:

(i) Aus $\Phi(\delta,u) = \overline{P}\, F\,(\delta,\Phi(\delta,u)) + u$ folgt wegen

$u \in N\left(I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right)$:

$$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right] \Phi\,(\delta,u) =$$

$$= \left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right] \overline{P}\, F\,(\delta,\Phi(\delta,u))\ ;$$

Mit $(I - E)\, F\,(\delta,\Phi(\delta,u)) = o$ und Bezeichnung 1.2.4.

folgt dann $\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right] \Phi\,(\delta,u) =$

$= F\,(\delta,\Phi(\delta,u))$.

Wegen Voraussetzung 1.2.1.(6) gilt dann

$$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)\right]\,(x_o+\Phi(\delta,u)) + f = o\ .$$

(ii) Wir definieren $u := h - \overline{P}\, F\,(\delta,h)$.
Dann bekommt man:

$$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right]u =$$

$\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right]h - E\, F\,(\delta,h)$. Aus der

Voraussetzung $\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\delta)(A_i+D_i)\right](x_o+h)+f = o$

folgt $\left[I - \sum_{i=1}^{n} g_i\,(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o)\right] h = F\,(\delta,h)$,

was dann

$u \in N\left(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(x_o)\right)$ bedeutet. Für dieses u gilt trivialerweise $h = \overline{P}\, F(\delta, u) + u$ und

$(I - E)\, F(\delta, h) = o$.

Definition 1.2.7.

$(Y, R, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über den reellen Zahlen.

$$a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$$

$$y : (-a, +a) \longrightarrow Y$$

$$o < r \leq a$$

Dann heißt y von der Klasse $C^{\omega}((-r, +r), Y) :\Longleftrightarrow$

$$\bigvee_{\{y_i\}_{i=o}^{\infty} \subseteq Y} : \bigwedge_{\lambda \in (-r,+r)} : y_o + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i y_i$$

konvergiert und $y(\lambda) = y_o + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i y_i$.

Definition 1.2.8.

$(X, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über den komplexen Zahlen;

$$a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\} ;$$

$$A : \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < a\} \longrightarrow \mathcal{B}(X,X)$$

Dann heißt A ein bei o analytischer Operator: $\Longleftrightarrow$

$$\bigvee_{\substack{\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(X,X) \\ 0 < r \leq a}} : \bigwedge_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ |\lambda| < r}} : A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i A_i \text{ konvergiert}$$

und $A(\lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i A_i$.

Zu einem gegebenen Banach-Raum $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ über den reellen Zahlen bezeichnen wir mit $(\tilde{X}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ seine Komplexifizierung, d.h. $\tilde{X} := \{x+iy \mid x,y \in X, i^2 = -1\}$ mit der Norm $\|z\|_{\tilde{X}} := \sup \{\|x \cos \vartheta + y \sin \vartheta\| \mid 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$.
Dann notieren wir den einfachen Zusammenhang zwischen der Klasse C^{ω} und den bei $\lambda = 0$ analytischen Operatoren.

Lemma 1.2.9.

$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über den reellen Zahlen; $(\tilde{X}, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ sei die Komplexifizierung von $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$;

$$a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\} ;$$

$$0 < r \leq a$$

$$A : (-a, +a) \longrightarrow \mathcal{B}(X,X)$$

sei von der Klasse $C^{\omega}\left((-r, +r), \mathcal{B}(X,X)\right)$. Dann stellt die Abbildung

$$\tilde{A} : \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < r\} \longrightarrow \mathcal{B}(\tilde{X},\tilde{X})$$

$$\lambda \longmapsto \tilde{A}(\lambda) : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$$

$$z = x + iy \longmapsto A_o x + iA_o y + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j (A_j x + iA_j y)$$

einen bei $\lambda = o$ analytischen Operator dar.

Wir zitieren nun den

Satz von Gochberg 1.2.10.

$(X, \mathbb{C}, \|\cdot\|)$ Banach-Raum

$a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$;

$A : \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < a\} \longrightarrow \mathcal{B}_o(X,X)$ sei bei $\lambda = o$ analytisch $A(o) = o$.

Dann gilt:
Die Aufgabe $I - A(\lambda)$ hat höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte.

Satz 1.2.11.

$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über den reellen Zahlen,

$a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{\infty\}$

$o < r \leq a$;

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $g_i : (-a, +a) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei aus der Klasse $C^{\omega}((-r, +r),\mathbb{R})$ und $g_i(o) = o$;

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$ sei vollstetig und Fréchet-differenzierbar;

Dann gilt:
Die Aufgabe $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ hat für $x_o \in X$ höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte.

Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(o)\, DA_i(x_o) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i^{(j)}(o)}{j!}\, DA_i(x_o)$$

konvergiert und stellt $\sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$ dar; also ist $FA : (-a, +a) \longrightarrow \mathcal{B}(X,X)$,
$\lambda \longmapsto \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(x_o)$, $\in C^{\omega}((-r, +r), \mathcal{B}(X,X))$
und wegen der Vollstetigkeit der A_i sogar von der Klasse $C^{\omega}((-r, +r), \mathcal{B}_o(X,X))$. Dann ist nach Lemma 1.2.9. die Komplexifizierung $\tilde{FA}$ ein bei $\lambda = o$ analytischer Operator. Mit $FA(o) = o$ gilt $\tilde{FA}(o) = o$. Nach Satz 1.2.10. hat die Aufgabe $I - \tilde{FA}(\lambda)$ höchstens abzählbar unendlich viele Eigenwerte. Also enthält die Menge $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \bigvee_{o \neq z \in \tilde{X}} : [I - \tilde{FA}(\lambda)]z = o\}$ höchstens abzählbar unendlich viele Elemente; diese ist aber gleich der Menge $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \bigvee_{o \neq x \in X} : [I - FA(\lambda)]x = o\}$.

§ 2 OBER SCHAREN HOMOGENER OPERATOREN

Das Ziel des vorliegenden §2 ist es, Forderungen an die $g(\lambda)$, $g_i(\lambda)$ und A_i $(i=1, \ldots, n)$ anzugeben, so daß der folgende Satz aus [1,p.186] für Scharen nichtlinearer Operatoren $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda) A_i$ in entsprechender Form gilt: L sei der Rand eines beschränkten Gebietes in einem Banach-Raum, das die Null enthält; ist der Abbildungsgrad des Vektorfeldes $(I - A)L$ von Eins verschieden, dann existiert ein Eigenvektor auf L , der zu einem positiven Eigenwert von A gehört.
Wir stellen folgende Forderungen: die A_i $(i=1, \ldots, n)$ seien homogen vom Grad s_i und es gelte $g(\lambda) = \lambda^n$, $g_i(\lambda) = \lambda^{n-1+(-i+1)\,s_i}$ $(i=1, \ldots, n)$; in diesem Fall nennen wir $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda) A_i$ eine Schar homogener Operatoren. Um die Definition des Abbildungsgrades für vollstetige Operatoren benutzen zu können, haben wir uns zum Beweis derjenigen Aussagen in 2.1. für die man den Abbildungsgrad benötigt, auf endlichdimensionale Räume zurückgezogen; in 2.2. weisen wir auf eine Ausdehnung auf separable Hilbert-Räume hin.

2.1. Definition und einige Eigenschaften von Scharen homogener Operatoren

Wir zeigen in 2.1.2., daß man der Schar homogener Operatoren $H(\lambda)$ im Raum X eine Aufgabe $\mathfrak{F} - \lambda \mathfrak{J}$ in X^n gegenüberstellen kann, mit dem Ergebnis, daß die von Null verschiedenen Eigenwerte der beiden Aufgaben übereinstimmen. Auf diese Beziehung werden wir in §2 stets zurückgreifen. In 2.1.3. machen wir für Scharen homogener Operatoren in einem Banach-Raum eine Aussage über die Lage aller Eigenwerte, deren Eigenelemente in einer Kugel um o liegen, falls dort die Operatoren der Schar einer Lipschitz-Bedingung genügen. Für alle weiteren Sätze in diesem Abschnitt haben wir uns auf endlichdimensionale X zurückgezogen. In Satz 2.1.5. und 2.1.6. geben wir hinreichende Bedingungen für die Existenz eines positiven Eigenwertes, und für die Existenz eines stetigen Zweiges. In Satz 2.1.9. wird die Menge der Eigenwerte einer Schar homogener Operatoren bei Voraussetzung der Stetigkeit als vom Typ F_σ erkannt.

(X,K) sei ein Vektorraum über dem Körper K.
Sind A_{ik}, $(i,k = 1, \ldots, n)$ Abbildungen von X in sich, so schreiben wir die Abbildung

$$\mathfrak{a} : X^n \longrightarrow X^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} A_{1k}\, x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{k=1}^{n} A_{nk}\, x_k \end{pmatrix}$$

auch in der Matrixform:

$$\mathfrak{a} : X^n \longrightarrow X^n$$

$$\underline{x} \longmapsto \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \underline{x};$$

mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen wir dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} I & & O \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ O & & I \end{pmatrix}.$$

Voraussetzung 2.1.1.

(1) $(X,\mathbb{R})$ bezeichnen einen Vektorraum über den reellen Zahlen;

(2) $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$ $(i=1, \ldots, n)$ seien homogen vom Grad s_i $(s_i \in \mathbb{N})$;

(3) $$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{map}(X,X)$$
$$\lambda \longmapsto \lambda^n I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-1+(-i+1)^{s_i}} A_i \ ;$$

(4) $$\mathfrak{F} : X^n \longrightarrow X^n$$
$$\underline{x} \longmapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & I & 0 \end{pmatrix} \underline{x} \ ;$$

Wir nennen H dann eine Schar homogener Operatoren vom Grad $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; wir werden im Folgenden auch $H(\lambda)$ schreiben, um den Eigenwertparameter anzudeuten. Wir werden $\mathfrak{F}$ den linearisierenden Operator nennen; diese Bezeichnung werden wir durch den folgenden Satz rechtfertigen, in dem wir der Eigenwertaufgabe $H(\lambda)$ eine Aufgabe $\mathfrak{F} - \lambda\mathfrak{J}$ gegenüberstellen, in der λ nur linear auftritt.

Satz 2.1.2.

Mit Definition 2.1.1. gilt für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
λ_o ist Eigenwert der Schar homogener Operatoren $H(\lambda)$ genau dann, wenn λ_o Eigenwert von $\mathcal{F} - \lambda\mathcal{J}$ ist.

Beweis:

Dazu zeigen wir die beiden Aussagen: A1, A2 :

A1 :

λ_o Eigenwert von $H(\lambda)$ mit einem Eigenvektor $x_o \Longrightarrow$
λ_o Eigenwert der Aufgabe $\mathcal{F} - \lambda\mathcal{J}$ mit einem Eigenvektor $(x_o, \lambda_o^{-1} x_o, \ldots, \lambda_o^{-n+1} x_o)$;

Beweis A1 :

$$\mathcal{F} \begin{pmatrix} x_o \\ \lambda_o^{-1} x_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_o^{-n+1} x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} A_i \, (\lambda_o^{-i+1} x_o) \\ x_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_o^{-n+2} x_o \end{pmatrix} = \lambda_o \begin{pmatrix} x_o \\ \lambda_o^{-1} x_o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_o^{-n+1} x_o \end{pmatrix} .$$

Zur Gültigkeit des rechten Gleichheitszeichens muß noch $\sum_{i=1}^{n} A_i \, (\lambda_o^{-i+1}) = \lambda_o \, x_o$ gelten; dafür genügt es, λ_o als Eigenwert von $H(\lambda)$ mit dem Eigenvektor x_o laut A1 vorauszusetzen und die Homogenität vom Grad s_i der Operatoren A_i auszunützen.

A2 :

λ_o Eigenwert von $\mathfrak{F} - \lambda\mathfrak{J}$ mit dem Eigenvektor $\underline{x} \Longrightarrow$ λ_o ist Eigenwert der Schar $H(\lambda)$ mit einem Eigenvektor x, der gleich der ersten Komponente von $\underline{x}$ ist.

Beweis A2 :

Aus $\mathfrak{F}\,\underline{x} = \lambda_o\,\underline{x}$ und $\underline{x} \neq o$ folgt: alle Komponenten von $\underline{x}$ sind von o verschieden; alle Komponenten in Abhängigkeit von x ausgedrückt und in $\mathfrak{F}\,\underline{x} = \lambda_o\,\underline{x}$ eingesetzt, hat $\sum_{i=1}^{n} A_i\,(\lambda_o^{-i+1}\,x) = \lambda_o\,x$ zur Folge. Aus der Homogenität vom Grad s_i der Operatoren A_i folgt dann $H(\lambda_o)x = o$.

Satz 2.1.3.

V o r a u s s e t z u n g :

Es gelte Voraussetzung 2.1.1.;
$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$;

$$\bigvee_{\rho > o} : \bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \bigvee_{q_i > o} : \bigwedge_{x,y \in \{x \in X \mid \|x\| \leq \rho\}} :$$

$$\|A_i x - A_i y\| \leq q_i \|x - y\| ;$$

$$\text{rad} := \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{o\} \mid \bigvee_{x \in \{x \in X \mid \|x\| \leq \rho;\, \|x\| \neq o\}} : H(\lambda)x = o\} ;$$

B e h a u p t u n g :

$$\text{rad} \leq \max\left[1 , \sum_{i=1}^{n} q_i\right]$$

$$\text{rad} \leq \max\left[1 + \max_{i=1,\ldots,n-1} q_i , q_n\right] .$$

Beweis:

(Erste Ungleichung): Hinreichend für die Gültigkeit der Ungleichung ist folgende Implikation:

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} : \left(\frac{1}{|\lambda|} \max [1 , \sum_{i=1}^{n} q_i] < 1 \Longrightarrow \right.$$

$$\left. \bigvee_{x \in \{x \in X \mid \|x\| \leq \rho\}}^{1} : H(\lambda)x = 0 \right).$$

Wir versehen nun den Raum $(X^n,\mathbb{R})$ mit der Norm

$$\|\underline{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := \max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\| .$$

Nach Satz 2.1.2. ist dann hinreichend für die obige Implikation:

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} : \left(\frac{1}{|\lambda|} \max [1 , \sum_{i=1}^{n} q_i] < 1 \Longrightarrow \right.$$

$$\left. \bigvee_{\underline{x} \in \{\underline{x} \in X^n \mid \|\underline{x}\| \leq \rho\}}^{1} : \mathfrak{F}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \right) .$$

Das zeigen wir durch Anwendung des Banachschen Fixpunkt-Satzes auf den Operator $\frac{1}{\lambda}\mathfrak{F}$.

(Zweite Ungleichung): Beweis wie oben; $(X^n,\mathbb{R})$ ist in diesem Fall mit der Norm $\|\underline{x}\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ zu versehen.

Bemerkung 2.1.4.

Als Spezialfall des Satzes 2.1.3. ergibt sich für lineare Operatoren die Behauptung:

$$\sup \{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } H(\lambda)\} \leq$$

$$\leq \max\left[1 , \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|\right] \quad \text{bzw.}$$

$$\leq \max\left[1 + \max_{i=1,\ldots,n-1} \|A_i\| , \|A_n\|\right] .$$

Beispiel zum Satz 2.1.3.

$X := C(G,\mathbb{R})$ mit $G \subset \mathbb{R}^N$ kompakt;

$\|x\| := \sup_{t \in G} \|x(t)\|$;

$s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$;

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig;

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i : C(G,\mathbb{R}) \longrightarrow C(G,\mathbb{R})$

$$f \longmapsto A_i f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto \int_G A_i(s,t)(f(t))^{s_i}\, dt;$$

$\rho > 0$;

$$\text{rad} := \{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \mid \bigvee_{\substack{x \in X\setminus\{0\} \\ \|x\| \leq \rho}} :$$

$$[\lambda^n I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-1+(-i+1)s_i} A_i]x = 0\};$$

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : q_i(\rho) := \sup_{s,t \in G} (|A_i(s,t)|)\, \rho^{n-1} \operatorname{mes}(G) ;$$

(mes (G) bezeichne hier das Lebesgue-Maß von G).
Dann gilt mit Satz 2.1.3.:

$$\text{rad} \leq \max \left[1, \sum_{i=1}^{n} q_i(\rho)\right] ;$$

$$\text{rad} \leq \max \left[1 + \max_{i=1,\ldots,n-1} q_i(\rho) , q_n(\rho)\right] .$$

Satz 2.1.5.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 2.1.1.;

(2) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein endlichdimensionaler linearer Raum;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: A_i stetig;

(4) $M \subseteq X$ sei eine beschränkte offene Menge mit $o \in M$;

(5) $d[\mathfrak{J} - \mathfrak{F} , \partial(M^n) , o] \neq 1$;

B e h a u p t u n g :

$$\bigvee_{\substack{\lambda_o > 1 \\ x_o \in M^a \setminus \{o\}}} : H(\lambda_o)\, x_o = o .$$

Beweis:

X^n werde mit der Produkttopologie versehen; wegen 2.1.5.(1),(3) ist $\mathfrak{F}$ stetig; da nach 2.1.5.(2) X^n endlichdimensional ist, ist $\mathfrak{F}$ vollstetig. Nach 2.1.5.(4) ist $M^n = M \times \ldots \times M$ eine beschränkte offene Menge in X^n mit der Eigenschaft $o \in M^n$. Durch 2.1.5.(5) sind alle Voraussetzungen zum Theorem 1.2.[1,p.186] erfüllt; also gibt es mindestens einen Eigenvektor $\underline{x}$ auf $\partial(M^n)$ zu einem Eigenwert $\lambda_o > 1$. Nach Satz 2.1.2. ist dann λ_o auch Eigenwert von $H(\lambda)$. Da $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \partial(M^n)$ ist $x_1 \in M^a$.

Analog beweist man folgenden Satz mit Hilfe von Theorem 1.3. [1,p.186] und Satz 2.1.2.

Satz 2.1.6.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 2.1.1.,

(2) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein endlichdimensionaler linearer Raum;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i$ stetig;

(4) $M \subset X$ sei eine beschränkte offene Menge mit der Eigenschaft: es gibt eine Umgebung $U(o)$ mit $U(o) \cap M = \emptyset$;

(5) $d[\mathfrak{J} - \mathfrak{F}, \partial(M^n), o] \neq o$.

B e h a u p t u n g :

$$\bigvee_{\substack{\lambda_o > 1 \\ x_o \in M^a \setminus \{o\}}} : H(\lambda_o)\, x_o = o \,.$$

Definition 2.1.7.

Unter der Voraussetzung 2.1.1. definieren wir für offene Mengen $G \subset X$ und $x_o \in G$ die Redeweise:
Die Eigenvektoren der Schar $H(\lambda)$ bilden einen stetigen Zweig in G, der durch x_o führt, genau dann, wenn gilt:

$$\bigwedge_{U \subset G} \left\{ \begin{array}{l} x_o \in U \\ \\ U \text{ offen, beschränkt} \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \partial(U^n) \cap \{\underline{x} \in X^n \mid \underline{x} \text{ Eigenvektor der Aufgabe } \mathfrak{F} - \lambda \mathfrak{J}\} \neq \emptyset \Big\} \,.$$

Im Falle $n = 1$ fällt diese Definition mit der gewohnten Definition [1, p.187] zusammen.

Satz 2.1.8.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 2.1.1.;

(2) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein endlichdimensionaler linearer Raum;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: A_i stetig;

(4) $x_o \in X\backslash\{o\}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_o \in \mathbb{R}\backslash\{o\}$ und x_o sei ein isolierter Punkt der Menge $\{x \in X \mid H(\lambda_o)x = o\}$;

(5) index $(\mathfrak{J} - \lambda_o^{-1}\mathfrak{F};\underline{x}_o) \neq o$ mit $\underline{x}_o := \begin{pmatrix} x_o \\ \lambda_o^{-1} x_o \\ \vdots \\ \lambda_o^{-n+1} x_o \end{pmatrix}$;

B e h a u p t u n g :

(1) $\bigvee_{\substack{G \subseteq X\backslash\{o\} \\ G \text{ offen}}}$: $x_o \in G$ und die Eigenvektoren der Schar $H(\lambda)$ bilden einen stetigen Zweig in G , der durch x_o führt.

(2) $\bigvee_{\substack{U(\lambda_o) \subseteq \mathbb{R} \\ U(\lambda_o) \text{ offen}}}$: $o \notin U(\lambda_o)$ und $\bigwedge_{\lambda \in U(\lambda_o)}$: λ Eigenwert von $H(\lambda)$.

Beweis:

Wegen 2.1.8.(4) ist $\underline{x}_o$ isolierter Punkt der Menge $\{\underline{x} \in X^n \mid [\mathfrak{F} - \lambda_o\mathfrak{J}]\underline{x} = \underline{o}\}$; da nach 2.1.8.(1),(2),(3) $\mathfrak{F}$ vollstetig ist, gilt nach Theorem 1.4. [1,p.187] :

$\bigvee_{\substack{F \subseteq X^n\backslash\{o\} \\ F \text{ offen}}}$: $\underline{x}_o \in F$

und

$$\bigwedge_{\substack{W(\underline{x}_0) \subseteq F \\ W(\underline{x}_0) \text{ offen und} \\ \text{beschränkt}}} : \partial W(x_0) \frown \{\underline{x} \in X^n \mid \underline{x} \text{ Eigenvektor von } \mathfrak{F} - \lambda \mathfrak{I}\} \neq \emptyset .$$

Also gilt:

$$\bigvee_{\substack{G \subseteq X \setminus \{0\} \\ G \text{ offen}}} : x_0 \in G$$

und

$$\bigwedge_{\substack{U \subseteq G \\ U \text{ beschränkt, offen} \\ x_0 \in U}} : \partial(U^n) \frown \{\underline{x} \in X^n \mid \underline{x} \text{ Eigenvektor von } \mathfrak{F} - \lambda \mathfrak{I}\} \neq \emptyset .$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt, die zweite folgt wieder mit Theorem 1.4. [1,p.187] und Satz 2.1.2..

Satz 2.1.9.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 2.1.1.;

(2) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein endlichdimensionaler linearer Raum;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i$ stetig;

B e h a u p t u n g :

Die Eigenwerte der Schar $H(\lambda)$ stellen eine Menge vom Typ F_σ dar.

Beweis:

Die Voraussetzungen des Satzes erlauben die Anwendung des Satzes von NEMYTSKII [1,p.273] auf die Aufgabe $\mathfrak{F} - \lambda\mathfrak{J}$. Satz 2.1.2. liefert dann die Behauptung.

2.2. Scharen schwach stetiger homogener Operatoren in separablen Hilbert-Räumen

In den Sätzen 2.1.5., 2.1.6., 2.1.8. des vorigen Abschnittes haben wir endliche Dimension von X gefordert. Von dieser Voraussetzung wollen wir uns hier noch befreien. Da $\mathfrak{F}$ nur dann vollstetig ist, wenn jedes Element des Matrixoperators vollstetig ist, was genau für die Räume X von unendlicher Dimension nicht erfüllt ist, arbeiten wir hier mit einer Verallgemeinerung des Abbildungsgrades von Borisovič auf schwach stetige Operatoren in separablen Hilbert-Räumen.

Wir geben zuerst einige Betrachtungen von Borisovič wieder [10].

Definition 2.2.1.

H, $\mathbb{R}$, $(\cdot,\cdot)$ sei ein separabler Hilbert-Raum;

H_n, H^m seien orthogonale Teilräume von H ;
$\dim H_n = n$; $\operatorname{codim} H^m = m$ und $n \leq m$;
P_n, P^m seien die orthogonalen Projektionen auf H_n und H^m;

$$J : H \longrightarrow H ;$$
$$x \longmapsto - P_n x + P^m x .$$

Für $r > 0$ heißt dann
$H(J) := \{x \in H \mid (Jx,x) = - \|P_n x\|^2 + \|P^m x\|^2 \leq r^2\}$
ein J-Gebiet des Raumes H .

Versehen mit der relativen schwachen Topologie erweist sich $H(J)$ als separierter topologischer Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt und auf dem die Abschließung einer Teilmenge dieses Raumes bezüglich der schwachen Topologie übereinstimmt mit der Menge aller Grenzwerte schwach konvergenter Folgen aus dieser Teilmenge.

Definition 2.2.2.

$U \subseteq H(J)$ sei eine beschränkte offene Teilmenge des J-Gebiets. Wir sagen, auf U^a ist ein schwach stetiges Vektorfeld $I - F$ definiert, wenn gilt: $F : U^a \longrightarrow H$ und $F(U^a) \subseteq H(J)$; zwei schwach stetige Felder $I - F_0$, $I - F_1$ nennen wir schwach homotop auf U^a , wenn gilt:

Es gibt $\Phi : [0,1] \times U^a \to H(J)$ mit $I - \Phi$ schwachstetig (d.h. Φ stetig in der Produkttopologie von $[0,1]$ und der induzierten schwachen Topologie) und $\Phi(o,\cdot) = F_o$, $\Phi(1,\cdot) = F_1$.

Es sei $U \subseteq H(J)$ beschränkt, offen;
$F : H(J) \longrightarrow H(J)$ schwach stetig;
$o \notin (I - F)(\partial U)$;
dann definiert Borisovič die Drehung des Feldes $I - F$ auf ∂U , die wir mit $Bd[I - F; \partial U; o]$ bezeichnen. Bd hat Eigenschaften wie der Abbildungsgrad d .

Satz 2.2.3.

V o r a u s s e t z u n g :

$(H, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot))$ separabler Hilbert-Raum;
$H(J)$ bezeichne ein J-Gebiet des Raumes H ;
$U \subseteq H(J)$ sei beschränkt, offen;
$F : H(J) \longrightarrow H(J)$ schwach stetig;
$o \notin (I - F)\, U$.

B e h a u p t u n g :

(i) $Bd[I - F; \partial U; o] \in \mathbb{Z}$;

(ii) $Bd[I - F; \partial U; o]$ ist unabhängig von der Fortsetzung des Feldes in das Innere von U ;

(iii) $I - F_o$ und $I - F_1$ seien schwach homotope Felder auf U^a mit $\Phi : [o,1] \times U^a \longrightarrow H(J)$ als Homotopie; wenn für $t \in [o,1]$ und $x \in \partial U$ $x - \Phi(x,t) \neq o$, ist $Bd[I - F_o, \partial U, o] = Bd[I - F_1, \partial U, o]$.

Voraussetzung 2.2.4.

(1) $(H, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot))$ separabler Hilbert-Raum;

(2) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i \in \mathrm{map}(H,H)$ schwach stetig und homogen vom Grad s_i ($s_i \in \mathbb{N}$) ;

(3) $K : \mathbb{R} \longrightarrow H$

$$\lambda \longmapsto \lambda^n I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-1+(-i+1)s_i} A_i \ ;$$

(4) $\mathfrak{F} : H^n \longrightarrow H^n$

$$\underline{x} \longmapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ I & o & o & \cdots & o & o \\ o & I & o & \cdots & o & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & & I & o \end{pmatrix} \underline{x} \ ;$$

(5) $H(J)$ sei ein J-Gebiet in H^n
(in H^n sei das Skalarprodukt

$$(\underline{x},\underline{y}) := \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)$$

definiert, wodurch H^n wieder ein separabler Hilbert-Raum wird);

(6) $\mathfrak{F}(H(J)) \subset H(J)$;

Lemma 2.2.5.

V o r a u s s e t z u n g :

$(X, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot))$ sei ein separabler Hilbert-Raum ;
$X(J)$ sei ein J-Gebiet in X ;
$U \subset X(J)$ beschränkte, offene Menge;
$A_1 : X(J) \longrightarrow X(J)$ und $A_2 : X(J) \longrightarrow X(J)$ schwach stetig;
$o \notin (I - A_1)(\partial U)$, $o \notin (I - A_2)(\partial U)$.

B e h a u p t u n g :

Wenn $\bigwedge_{x \in \partial U}$: $x - A_1x$ und $x - A_2x$ sind entgegengesetzt,
dann gilt: $Bd[I - A_1, \partial U, o] = Bd[I - A_2, \partial U, o]$.

Beweis:

$\bigwedge_{x \in \partial U}$: $x - A_1x$ und $x - A_2x$ sind entgegengesetzt,

hat zur Folge:

$\bigwedge_{x \in \partial U} : \bigwedge_{t \in (o,1)} : (I - [tA_1 + (1-t)A_2])x \neq o$.

Da $o \notin (I - A_1)(\partial U)$, $o \notin (I - A_2)(\partial U)$
sind $(I - A_1)(\partial U)$ und $(I - A_2)(\partial U)$ schwach homotop.
Mit Satz 2.2.3.(iii) gilt die Behauptung.

Satz 2.2.6.

V o r a u s s e t z u n g :

Es sei Voraussetzung 2.2.4. wirksam;
$U \subseteq H$ beschränkte offene Menge mit $o \in U$ und $U^n \subseteq H(J)$;
$Bd[I - \mathfrak{F}, \partial(U^n), o] \neq 1$;

B e h a u p t u n g :

$$\bigvee_{\substack{\lambda_o > 1 \\ x_o \in U^a \setminus \{o\}}} : K(\lambda_o)x_o = o \ .$$

Beweis:

$A_1, \ldots, A_n$ schwach stetig hat $\mathfrak{F}$ schwach stetig zur Folge; U^n ist beschränkte offene Menge mit $o \in U^n$ und $U^n \subseteq H(J)$; Da $Bd[I, \partial(U^n), o] = 1$ gilt und per Voraussetzung $Bd[I - \mathfrak{F}, \partial(U^n), o] \neq 1$ ist, folgt nach Lemma 2.2.5. :

$$\bigvee_{\underline{x} \in \partial(U^n)} : \bigvee_{\mu > o} : -\mu\underline{x} = \underline{x} - \mathfrak{F}\underline{x} \ .$$

Aus Satz 2.1.2. folgt: $1 + \mu$ ist Eigenwert von $K(\lambda)$.

Analog zeigt man:

Satz 2.2.7.

V o r a u s s e t z u n g e n :

Es sei Voraussetzung 2.2.4. wirksam;
$M \subseteq H$ beschränkte offene Menge mit $M^n \subseteq H(J)$ und der Eigenschaft: es gibt eine Umgebung $U(o)$ mit
$U(o) \cap M = \emptyset$; $Bd[I - \mathfrak{F}, \partial(M^n), o] \neq o$;

B e h a u p t u n g :

$$\bigvee_{\substack{\lambda_o > 1 \\ x_o \in M^a \setminus \{o\}}} : K(\lambda_o)x_o = o \ .$$

§ 3 ZUM VERZWEIGUNGSVERHALTEN VON SCHAREN NICHTLINEARER OPERATOREN

Ziel dieses Paragraphen ist die Angabe einer hinreichenden Bedingung für $\lambda_o \in \mathbb{R}$, damit λ_o Verzweigungspunkt der Schar nichtlinearer Operatoren ist. Eine notwendige Bedingung merken wir in 3.2. an. Für die hinreichende Bedingung benötigen wir einen Satz zur Berechnung des Abbildungsgrades der linearisierten Schar, den wir in 3.1. angeben.

3.1. Zur Berechnung des Abbildungsgrades eines Vektorfeldes einer Abbildung vom Typ $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i$

In Satz 3.1.1. geben wir eine Verallgemeinerung eines Satzes von LERAY und SCHAUDER [1, p.133] an. Für vollstetige lineare Abbildungen A_i und für spezielle Formen der Funktionen g_i, nämlich $g_i(\lambda) = |\lambda|^{\alpha_i}$ oder $g_i(\lambda) = (\operatorname{sgn} \lambda)|\lambda|^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^*$, ermöglicht der Satz die Bestimmung des Abbildungsgrades. Satz 3.1.7. gibt dann an, wie man dieses Ergebnis zur Berechnung des Index eines isolierten Fixpunktes eines nichtlinearen Vektorfeldes anzuwenden hat.

Satz 3.1.1.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über den reellen Zahlen;

(2) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $A_i \in \beta_o(X,X)$;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $g_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ hat die Eigenschaften:

$g_i(1) = 1$,

$\bigwedge_{s \in \mathbb{R}}$: $(g_i(s) = o \iff s = o)$,

$\bigwedge_{\substack{s,t \in \mathbb{R} \\ t \neq o}}$: $\dfrac{g_i(s)}{g_i(t)} = g_i(\dfrac{s}{t})$,

$\lim\limits_{s \to o} \dfrac{g_n(s)}{g_i(s)} = o$;

(4) $\lambda_o \in \mathbb{R}$ sei kein Eigenwert der Aufgabe

$I - \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i$;

(5) $\bigwedge_{\overline{\lambda} \in \mathbb{R}}$: $\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lambda} \text{ Eigenwert der Aufgabe } I - \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \\ \\ \overline{\lambda} \in \text{con } (o,\lambda_o) \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{\hat{\lambda} \in \mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\lambda} \text{ Eigenwert von } I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \\ \\ \text{span } (ev(\hat{\lambda})) \cap \text{span } (ev(\bar{\lambda})) \neq \emptyset \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left. \Longrightarrow \hat{\lambda} \in \text{con } (o, \lambda_o) \right\} \Bigg\} \; ;$$

(6) $E(\lambda_o) := \text{span } (\{e \in X \mid \bigvee_{\lambda \in \text{con}(o,\lambda_o)} :$

$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i]e = o\})$ sei endlich dimensional;

(7) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i(E(\lambda_o)) \subseteq E(\lambda_o)$;

(8) $\bigvee_{E \subseteq X} :$ $E \oplus E(\lambda_o) = X$ und $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} :$

E lim.Teilraum

$A_i(E) \subseteq E$;

(9) $\bigwedge_{x \in E(\lambda_o) \cap \{x \in X \mid \|x\| = 1\}} : A_n x \neq o$;

B e h a u p t u n g :

$$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i, \{x \in X \mid \|x\| = 1\}, o] =$$

$$= [\text{sign } (g_n(-1))]^{\dim E(\lambda_o)} .$$

Beweis:

1. Fall: $\lambda_o = o$.

Aus 3.1.1.(3) folgt $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i = I$; dann ist

$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(o) A_i , \{x \in X | \|x\| = 1\} , o] = 1$.

Da $\dim E(\lambda_o) = o$, gilt die Behauptung.

2. Fall: $\lambda_o \neq o$.

Dieser Fall besteht im wesentlichen aus den folgenden Hilfssätzen 1 und 2.

Hilfssatz 1:

Es sei $S_1 := \{x \in E | \|x\| = 1\} \cap E(\lambda_o)$.
Dann gilt:
$o \notin g_n(-1) I(S_1)$;

$o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i](S_1)$;

$g_n(-1)I(S_1)$ ist homotop zu $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i](S_1)$.

Beweis: Hilfssatz 1:

Die beiden ersten Behauptungen des Hilfssatzes 1 sind triviale Folgerungen der Voraussetzungen, $g_n(s) \neq o$ für $s \neq o$, und 3.1.1.(4).

Zum Beweis der Homotopie definieren wir zuerst stetige Funktionen f_i und eine Abbildung H :

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : f_i : [-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g_n(s)}{g_i(s)} & \text{falls } s \neq 0 \\ 0 & \text{falls } s = 0 \text{ und } i \neq n \\ 1 & \text{falls } s = 0 \text{ und } i = n, \end{cases}$$

$$H : [0,1] \times S_1 \longrightarrow E(\lambda_0)$$

$$(t,x) \longmapsto [g_n(2t-1)\, I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0 t)\, f_i(2t-1)\, A_i]x \,.$$

Nach 3.1.1.(7) ist H eine Abbildung in $E(\lambda_0)$ und es gilt

$H|_{\{0\}\times S_1}(S_1) = g_n(-1)\, I\,(S_1)$ und

$H|_{\{1\}\times S_1}(S_1) = [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0)\, A_i](S_1)$; ferner ist H stetig nach 3.1.1.(2),(3) und Definition von f_i . Also bleibt für die Homotopie noch nachzuweisen, daß

$$\bigwedge_{t \in (0,1)} : 0 \notin H|_{\{t\}\times S_1}(S_1) \,.$$

Wir behandeln zuerst den Fall $t = \frac{1}{2}$:

$H|_{\{\frac{1}{2}\}\times S_1}(S_1) = g_n(\lambda_0 \cdot \frac{1}{2})\, A_n\,(S_1)$ und nach $\lambda_0 \neq 0$ (2.Fall), 3.1.1.(3), 3.1.1.(9), gilt $0 \notin H|_{\{\frac{1}{2}\}\times S_1}(S_1)$.

Wir zeigen nun noch den Fall $t \neq \frac{1}{2}$:

Wegen 3.1.1.(3) ist $o \notin H|_{\{t\}\times S_1}(S_1)$ äquivalent mit

$$o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i\left(\frac{\lambda_o t}{2t-1}\right) A_i](S_1) .$$

Nun gilt $\bigwedge_{\substack{t \in (o,1) \\ t \neq \frac{1}{2}}} : \frac{\lambda_o t}{2t-1} \in \mathbb{R}\backslash con(o,\lambda_o)$.

Das hat aber nach 3.1.1.(5),(6) zur Folge, daß

$$\bigwedge_{\substack{t \in (o,1) \\ t \neq \frac{1}{2}}} : \bigwedge_{x \in S_1} : [I - \sum_{i=1}^{n} g_i\left(\frac{\lambda_o t}{2t-1}\right)] x \neq o ,$$

was zu zeigen war.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2:

Es sei $S_2 := \{x \in E \mid \|x\| = 1\} \cap E$.

Dann gilt:

$o \notin I(S_2)$;

$o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i](S_2)$;

$I(S_2)$ ist homotop zu $[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i](S_2)$.

Beweis: Hilfssatz 2:

$o \notin I(S_2)$ ist trivial nach Definition von S_2 ;

$o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o) A_i](S_2)$ gilt wegen 3.1.1.(4).

Zum Beweis der Homotopie definieren wir eine Abbildung H :

$$H : [o,1] \times S_2 \longrightarrow E$$

$$(t,x) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} g_i(t\lambda_o)\, A_i x \ .$$

Nach 3.1.1.(8) liegt der Wertebereich von H in E und es gilt:

$$H|_{\{o\}\times S_2}(S_2) = \{o\} \ , \quad H|_{\{1\}\times S_2}(S_2) =$$

$$= [\sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i](S_2) \ .$$

Also bleibt für die Homotopie noch nachzuweisen, daß H vollstetig ist und

$$\bigwedge_{t \in (o,1)} : o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(t\lambda_o)\, A_i](S_2) \ .$$

Nach [1,p.108] sind für die Vollstetigkeit von H folgende drei Forderungen hinreichend:

I) H stetig;

II) $\bigwedge_{t \in [o,1]} : H|_{\{t\}\times S_2}$ ist vollstetig;

III) $\bigwedge_{\varepsilon > o} : \bigvee_{\delta > o} : \bigwedge_{t_1,t_2 \in [o,1]} : (|t_1-t_2|<\delta \Longrightarrow$

$$\bigwedge_{x \in S_2} : \|H(t_1,x) - H(t_2,x)\| < \varepsilon) \ ;$$

diese 3 Forderungen sind wegen 3.1.1.(2)(3) erfüllt. $t\lambda_o \in con(o,\lambda_o)$; in $con(o,\lambda_o)$ liegen jedoch nur Eigenwerte, deren Eigenvektoren in $E(\lambda_o)$ liegen; da $S_2 \subseteq E$ gilt

$$\bigwedge_{t \in (o,1)} : o \notin [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o t)\, A_i](S_2) \ .$$

Aus Hilfssatz 1 und 2 folgt:

$$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_1,\ o] = d[g_n(-1)I,\ S_1,\ o]$$

$$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_2,\ o] = d[I,\ S_2,\ o] \ .$$

Nach [1,p.129] (Produkt-Satz für den Abbildungsgrad) gilt:

$$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_1 \times S_2,\ o] =$$

$$= d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_1,\ o] \cdot d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_2,\ o] =$$

$$= d[g_n(-1)I,\ S_1,\ o] \cdot d[I,\ S_2,\ o] =$$

$$= d[g_n(-1)I,\ S_1,\ o] =$$

$$= d[\mathrm{sign}(g_n(-1))I,\ S_1,\ o] \ .$$

Nach [1,p.92] gilt:

$$d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i,\ S_1 \times S_2,\ o] = [\mathrm{sign}(g_n(-1))]^{\dim E(\lambda_o)} \ .$$

Damit ist bis auf $S_1 \times S_2$ die Behauptung erreicht.

Die Menge $\{x \in E(\lambda_o) \mid \|x\| \leq 1\} \times \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ enthält als einzigen Fixpunkt der Abbildung $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i$ (zur Definition siehe [1,p.109]) die o ; der Index dieses Fixpunktes ist also $[\mathrm{sign}(g_n(-1))]^{\dim E(\lambda_o)}$. Also gilt die Behauptung von Satz 3.1.1. .

Bemerkung 3.1.2.

Aus Voraussetzung 3.1.1.(3) folgt:

$$\bigvee_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\subset\mathbb{R}_+^*} : \Big(\bigwedge_{i=1,\ldots,n-1} : \alpha_i < \alpha_n \Big)$$

und

$$\Big(\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \bigwedge_{s\in\mathbb{R}} : g_i(s) = |s|^{\alpha_i}$$

oder

$$g_i(s) = (\operatorname{sign} s)|s|^{\alpha_i}) \ .$$

Umgekehrt erfüllt natürlich diese spezielle Wahl der g_i die 4 Forderungen von 3.1.1.(3).

Die Ursache dafür, daß die Klasse der Funktionen g_i relativ klein ist, ist die Forderung:

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \bigwedge_{\substack{s,t\in\mathbb{R}\\ t\neq 0}} : \frac{g_i(s)}{g_i(t)} = g_i\left(\frac{s}{t}\right) \ ;$$

sie wird an entscheidender Stelle im Beweis von Hilfssatz 1 benötigt.

Bemerkung 3.1.3.

Wir machen folgende zusätzliche Voraussetzungen:

$(X,\mathbb{R},(\cdot,\cdot))$ sei Hilbert-Raum;

$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sei VONS in X ;

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \bigvee_{\{\alpha_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}} : \bigwedge_{j\in\mathbb{N}} : A_i e_j = \alpha_{ij} e_j \ ;$$

Dann gilt:

$$3.1.1.(5) \iff \bigwedge_{j\in\mathbb{N}} : S_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto 1 - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, \alpha_{ij}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Nullstelle.

Um die zu 3.1.1.(5) äquivalente Bedingung zu erfüllen, kann man die Monotonie von

$\sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, \alpha_{ij}$ absichern.

Bemerkung 3.1.4.

Wenn man zusätzlich voraussetzt:

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : g_i(\lambda) = \lambda^i$, dann ist 3.1.1.(6) (d.h. $E(\lambda$ endlich dimensional) erfüllt.

Bemerkung 3.1.5.

Im Spezialfall $n = 1$, $g_1(\lambda) = \lambda$ sind die Voraussetzungen 3.1.1.(3), (5), (6), (7) von selbst erfüllt. 3.1.1.(8), (9) werden auch im Beweis aus [1,p.133-135] gebraucht, wenn sie auch nicht unter den Voraussetzung dort aufgeführt werden.

Beispiel 3.1.6. (zu Satz 3.1.1.)

$(X, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot))$ sei Hilbert-Raum;

$\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sei VONS in X ;

$\bigwedge_{\substack{i=1,\dots,n \\ i \text{ gerade}}}$: $A_i \in \beta_\infty(X,X)$ und $A_i = o$ falls i ungerade;

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $\bigvee_{\{\alpha_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}}$: $\bigwedge_{j \in \mathbb{N}}$: $A_i e_j = \alpha_{ij} e_j$;

$\bigwedge_{j \in \mathbb{N}}$: $\left(\bigwedge_{i=1,\dots,n} : \alpha_{ij} \geq o \right)$ oder

$\left(\bigwedge_{i=1,\dots,n} : \alpha_{ij} \leq o \right)$;

λ_o sei kein Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i A_i$;

$$E(\lambda_o) := \operatorname{span}\Big(\{e_j \in X \mid \bigvee_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \operatorname{con}(o,\lambda_o)}} : \Big[I - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i A_i\Big] e_j = o\}\Big) ;$$

$\bigwedge_{e_j \in E(\lambda_o)}$: $\alpha_{nj} \neq o$;

Unter diesen Voraussetzungen sind die Voraussetzungen von Satz 3.1.1. erfüllt.

Satz 3.1.7.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$;

(2) $\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $A_i : X \longrightarrow X$ vollstetig und Frêchet-differenzierbar in $x_o \in X$;

(3) $\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(4) λ_o sei kein Eigenwert der Aufgabe

$$I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i\,(x_o).$$

B e h a u p t u n g :

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i \;\; x_o = o \quad \Longrightarrow$$

x_o ist isolierter Punkt der Menge

$$\{x \in X \mid [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i]x = o\} \text{ und es gilt:}$$

$$\bigwedge_{r>o} \text{ mit } \{x\in X \mid \|x-x_o\|=r\} \cap \{x\in X \mid [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i]x=o\} = \emptyset$$

gilt: $\mathrm{index}\,(x_o ; I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i) =$

$$= d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i\,(x_o) \;,\; \{x \in X \mid \|x-x_o\| = r\} \;,\; o] \;.$$

Beweis:

Entspricht recht genau dem Beweis zu Satz 4.7. aus [1].

3.2. Ober Verzweigungspunkte von Scharen nichtlinearer Operatoren

Wie beim Problem $I - \lambda A$ liegen die Verzweigungspunkte einer Schar nichtlinearer Operatoren, wenn A_i $(i = 1,\ldots,n)$ vollstetig ist, $DA_i(o)$ existiert, und $g_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $(i=1,\ldots,n)$, in Eigenwerten der linearisierten Aufgabe.

Wenn man noch zusätzlich $g_i(\lambda) = \lambda^i$ hat, dann haben die Verzweigungspunkte im Endlichen keinen Häufungspunkt.

Definition 3.2.1.

$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$ mit Norm $\|\cdot\|$;

$n \in \mathbb{N}$;

$\bigwedge_{i=o,\ldots,n}$: $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$, $g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

unter diesen Voraussetzungen definieren wir:

$$\mathrm{bif}\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i\Big) :=$$

$$= \left\{ \lambda_o \in \mathbb{R} \;\middle|\; \bigwedge_{\substack{\varepsilon > o \\ \delta > o}} : \bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} : \left| |\lambda - \lambda_o| < \varepsilon \text{ und } \bigvee_{x \in X} : \begin{array}{l} x \neq o \\ \|x\| < \delta \\ \sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i x = o \end{array} \right| \right\}$$

heißt Menge der Verzweigungspunkte von $\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i$;

$$\mathrm{ew}\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i\Big) := \left\{ \lambda_o \in \mathbb{R} \;\middle|\; \bigvee_{x \in X\setminus\{o\}} : \sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda_o)\, A_i\, x = o \right\}$$

heißt Menge der Eigenwerte von $\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i$;

λ_o sei nun ein isolierter Punkt der Menge

$\mathrm{bif}\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i\Big)$, und $\varepsilon > o$, dann definieren wir:

$$N\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \;;\; \lambda_o \;;\; \varepsilon\Big) := \bigcup_{\lambda \in (-\varepsilon+\lambda_o,\lambda_o+\varepsilon)\cap} ev(\lambda) \;;$$
$$\cap\, ew\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i\Big)$$

weiter nennen wir $N\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \;;\; \lambda_o \;;\; \varepsilon\Big)$ einen stetigen Zweig von Eigenvektoren zum Verzweigungspunkt λ_o, wenn gilt:

$$\bigvee_{\delta > o} : \quad \bigwedge_{\substack{U \subseteq \{x \in X \mid \|x\| < \delta\} \\ U \text{ offen} \\ o \in U}} :$$

$$\partial U \cap N\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \;;\; \lambda_o \;;\; \varepsilon\Big) \neq \emptyset \;.$$

Satz 3.2.2.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ sei ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$ mit der Norm $\|\cdot\|$;

(2) $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $A_i \in map(X,X)$ vollstetig, $A_i o = o$ und es existiert $DA_i(o)$, die Frêchet-Ableitung an der Stelle o ;

(4) $\bigvee_{1 \le i \le n}$: $DA_i(o) \neq o \in map(X,X)$;

(5) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $g_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

B e h a u p t u n g :

(i) $\operatorname{bif}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i) \subseteq \operatorname{ew}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o))$;

(ii) $\bigvee_{1 \le i \le n}$: A_i nicht linear $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{bif}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i) \neq$

$\operatorname{ew}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o))$;

(iii) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}}$: $g_i(\lambda) = \lambda^i$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{bif}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i)$ ist entweder leer oder eine Menge, die aus isolierten Punkten besteht.

Beweis:

Zu (iii):

Bekanntlich ist für $g_i(\lambda) = \lambda^i$ die Menge $\operatorname{ew}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o))$ höchstens abzählbar und besitzt im Endlichen keinen Häufungspunkt, da

$\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $DA_i(o)$ vollstetig. Nach (i) folgt daraus die Behauptung.

Zu (ii):

Klar mit Gegenbeispiel [1,p.193].

Zu (i):

Analog [1,p.192] zeigt man folgendes

Lemma:

V o r a u s s e t z u n g :

$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ Banach-Raum;

$n \in \mathbb{N}$;

$\bigwedge_{i=o,\ldots,n}$: $A_i \in map(X,X)$ stetig, $A_i o = o$ und es existiert die Frêchet-Ableitung $DA_i(o)$ an der Stelle o , wobei $DA_i(o)$ beschränkt ist.

$\bigwedge_{i=o,\ldots,n}$: $g_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

$\bigvee_{o \le i \le n}$: $DA_i(o) \neq o \in map(X,X)$.

B e h a u p t u n g :

$$\bigwedge_{\lambda_o \in \mathbb{R}} \Big[\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(o) \Big)^{-1} : \sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda_o)\, DA_i(o)(X) \longrightarrow X \text{ stetig} \Longrightarrow \Longrightarrow \lambda_o \notin bif\Big(\sum_{i=o}^{n} g_i(\lambda)\, A_i \Big) \Big] .$$

Die Vollstetigkeit der A_i liefert die Vollstetigkeit der $DA_i(o)$; mit der Wahl $A_o := I$, $g_o(\lambda) := 1$ ergibt sich die Behauptung (i).

Beispiel 3.2.3.

V o r a u s s e t z u n g :

$G \subset \mathbb{R}^q$ beschränkt und abgeschlossen;

$(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|) := (C(G,\mathbb{R}), \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$;

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $K_i(\cdot,\cdot) \in C(G\times G, \mathbb{R})$;

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $f_i(\cdot,\cdot) : G \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,

$f_i(t,u)$ nach u stetig partiell differenzierbar,

für $t \in G$: $f_i(t,o) = o$;

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $A_i : X \longrightarrow X$

$u \longmapsto A_i u : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s \mapsto \int_G K_i(s,t) f(t,u(t))\, dt ;$$

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $g_i \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

$\bigwedge_{i=1,\dots,n}$: $B_i : X \longrightarrow X$

$v \longmapsto B_i v : G \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s \mapsto \int_G K_i(s,t) \frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\Big|_{u=o} v(t)\, dt .$$

B e h a u p t u n g :

Nach 3.2.2.(i) gilt:

$$\mathrm{bif}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i) \subseteq \mathrm{ew}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, B_i) \ .$$

3.3. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines stetigen Zweiges

Satz 3.2.2. gibt nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für die Lage eines Verzweigungspunktes einer Schar nichtlinearer Operatoren. Es wäre wünschenswert, eine hinreichende Bedingung in ähnlicher Allgemeinheit zu besitzen, die nur eine Voraussetzung vom Typ 3.3.1.(5) kennt. Die zusätzlichen Einschränkungen müssen wir hier machen, da wir als wesentlichstes Hilfsmittel Satz 3.1.1. verwenden.

Satz 3.3.1.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) $(X, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ Banach-Raum über $\mathbb{R}$ mit der Norm $\|\cdot\|$;

(2) $n \in \mathbb{N}$;

(3) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n}$: $A_i \in \mathrm{map}(X,X)$ vollstetig, $A_i o = o$ und es existiere $DA_i(o)$;

(4) Für g_i $(i = 1, \ldots, n)$ gelte Voraussetzung 3.1.1.;

(5) λ_o sei ein Eigenwert der Aufgabe $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o)$, dessen geometrische Vielfachheit ungerade ist;

(6) $\varepsilon_o > o$ habe die Eigenschaft:

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda-\lambda_o| \le \varepsilon_o\} \cap \mathrm{ew}\Big(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o)\Big) = \{\lambda_o\};$$

(7) $\bigwedge_{\bar\lambda \in \mathbb{R}}$ ($\bar\lambda$ Eigenwert der Aufgabe $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o)$ $\Longrightarrow$ $\bar\lambda \in \mathrm{con}(o\ ,\ \lambda_o\ {}_{(\pm)},\ \varepsilon_o)$) $\Longrightarrow$ $\bigwedge_{\hat\lambda \in \mathbb{R}}$ ($\hat\lambda$ Eigenwert von $I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o)$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{span}(\mathrm{ev}(\hat\lambda)) \cap \mathrm{span}(\mathrm{ev}(\bar\lambda)) \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ $\hat\lambda \in \mathrm{con}(o\ ,\ \lambda_o\ {}_{(\pm)},\ \varepsilon_o)$)) ;

(8) $E(\lambda_o \overset{+}{(-)} \varepsilon_o) := \operatorname{span}(\{e \in X \mid \bigvee_{\lambda \in \operatorname{con}(o,\lambda_o \overset{+}{(-)} \varepsilon_o)} :$

$$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, DA_i(o)]e = o\}) ;$$

(9) $E(\lambda_o + \varepsilon_o)$ sei endlich dimensional;

(10) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : A_i(E(\lambda_o+\varepsilon_o)) \subseteq E(\lambda_o+\varepsilon_o)$,

$A_i(E(\lambda_o-\varepsilon_o)) \subseteq E(\lambda_o-\varepsilon_o)$;

(11) $\bigvee_{E_1,E_2}$: E_1, E_2 sind lineare Teilräume von X und es gilt:

$E_1 \oplus E(\lambda_o-\varepsilon_o) = X$, $A_i(E_1) \subseteq E_1$

$E_2 \oplus E(\lambda_o+\varepsilon_o) = X$, $A_i(E_2) \subseteq E_2$;

(12) $\bigwedge_{x \in E(\lambda_o+\varepsilon_o) \cap \{x \in X \mid \|x\| = 1\}} : A_n x \neq o$

(13) $\operatorname{sign}(g_n(-1)) = -1$;

B e h a u p t u n g :

(i) $\lambda_o \in \operatorname{bif}(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i)$;

(ii) $\bigvee_{\varepsilon > o}$: $N(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i; \lambda_o; \varepsilon)$

ist ein stetiger Zweig.

Beweis:

Aus (5), (6) folgt mit 3.2.2.(i):

$$\bigwedge_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \varepsilon : \bigvee_{\substack{\varepsilon_1>0 \\ \delta_1>0}} : \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} : \left| |(\lambda_0 \underset{(-)}{+} \varepsilon) - \lambda| < \varepsilon_1 \Longrightarrow \right.$$

$$\left. \Longrightarrow \bigwedge_{x \in X} \left| \begin{array}{c} \|x\| < \delta_1 \\ \\ [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0 \underset{(-)}{+} \varepsilon) A_i]x = 0 \end{array} \Longrightarrow x = 0 \right| \right|$$

Dann gilt nach Satz 3.1.7.:

o ist ein isolierter Punkt der Menge

$[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0 \underset{(-)}{+} \varepsilon) A_i] \{x \in X | \|x\| < \delta\}$ und es ist

$$\text{index}(o ; I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0 \underset{(-)}{+} \varepsilon) A_i) =$$

$$= d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_0 \underset{(-)}{+} \varepsilon) DA_i(o) , \{x \in X | \|x\| < \delta\} , o] .$$

Diese Abbildungsgrade kann man auf Grund unseres Satzes 3.1.1. durch die hier getroffenen Voraussetzungen ausrechnen:

3.1.1.(2) erfüllt für $DA_i(o)$, da A_i vollstetig;

3.1.1.(3) = (4) ;

3.1.1.(4) erfüllt, da λ_0 aus Voraussetzung (5) nach (6) isoliert ist;

3.1.1.(5) erfüllt für $\lambda_o \pm \varepsilon$, da λ_o isoliert und 3.1.1.(7).

3.1.1.(6) erfüllt für $E(\lambda_o \pm \varepsilon)$ wegen 3.3.1.(9).

3.1.1.(7), (8), (9) erfüllt wegen 3.3.1.(10), (11), (12).

Also sind die Voraussetzungen von 3.1.1. erfüllt und man erhält mit 3.3.1.(13) und der Voraussetzung, daß die geometrische Vielfachheit von λ_o ungerade ist (3.3.1.(5)):

$$\operatorname{index}(o\ ;\ I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\varepsilon)\ A_i) \neq \operatorname{index}(o;I- \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o-\varepsilon)\ A_i).$$

Also gilt auch:

$$\bigwedge_{U \subseteq \{x \in X \mid \|x\|<\delta_1\}\ U \text{ offen}} : d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o+\varepsilon)\ A_i,\ \partial U,\ o] \neq d[I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o-\varepsilon)\ A_i,\ \partial U,\ o]$$

also sind die beiden Vektorfelder nicht homotop, d.h.

$$\bigvee_{(x,t) \in \partial(U)\times(0,1)} : [I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o-\varepsilon+2t\varepsilon)\ A_i]x = o\ .$$

Dann gilt:

$$\bigwedge_{o<\varepsilon\leq\varepsilon_o} : \bigvee_{\delta_1>o} : \bigwedge_{o<\delta\leq\delta_1} : \bigvee_{t\in(0,1)} \left| |\lambda_o-(\lambda_o-\varepsilon+2t\varepsilon)| < \varepsilon \right.$$

und $\bigvee_{x \in X}$: $\left.\begin{array}{c} x \neq o \\ \|x\| < \delta \\ [I- \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda_o-\varepsilon+2t\varepsilon)\ A_i]x = o \end{array}\right.$;

also ist λ_o ein Verzweigungspunkt und

$N(I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)\, A_i;\ \lambda_o;\ \varepsilon_o)$ ein stetiger Zweig.

K A P I T E L II

ZUR PRAKTISCHEN BESTIMMUNG VON EIGENWERTEN DER AUFGABE $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$. (A_i linearer Integraloperator)

In §1 und §3 hat es sich gezeigt, daß für Sätze über Eigenschaften nichtlinearer Eigenwertaufgaben vom Typ $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)A_i$ (A_i nichtlinearer Operator) die Lage der Eigenwerte der linearisierten Aufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)DA_i(x_o)$ für geeignete $x_o \in X$ wichtig ist. Bevor wir an ein numerisches Verfahren denken, wollen wir in §4 eine Fehlerabschätzung für den Spezialfall $\lambda^2 I - \lambda A - B$ herleiten. In §5 wollen wir dann ein Verfahren zur Bestimmung von Näherungen für die Eigenwerte der Aufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{n} g_i(\lambda)DA_i(x_o)$, wenn $DA_i(x_o)$ Integraloperatoren sind, angeben, das im Spezialfall $\lambda^2 I - \lambda A - B$ den einschränkenden Forderungen an das Wohlverhalten der Näherungsaufgabe genügt, die wir in §4 gestellt haben.

§ 4 EINE FEHLERABSCHÄTZUNG FÜR AUFGABEN VOM TYP $\lambda^2 I - \lambda A - B$

In diesem Paragraphen werden wir Fehlerabschätzungen für den Abstand der Eigenwerte einer Näherungsaufgabe $\tilde{\lambda}^2 I - \tilde{\lambda}\tilde{A} - \tilde{B}$ von der ursprünglich gegebenen Aufgabe $\lambda^2 I - \lambda A - B$ in einem separablen Hilbert-Raum H machen (A, $\tilde{A}$, B, $\tilde{B}$ selbstadjungiert; B, $\tilde{B}$ positiv; A, $\tilde{A}$, $B^{\frac{1}{2}}$, $(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_2(H,H)$;) . Nach der Herleitung einer für praktische Zwecke unbrauchbaren Form einer solchen Schranke in Abschnitt 4.1. bietet sich eine Teilung der Aufgabe an, die in 4.1. aufgestellte Schranke für den Eigenwertfehler durch eine bestimmbare obere Schranke abzuschätzen. Die Teilung erfolgt in die Fälle, daß die Spektraldarstellung von B bekannt bzw. nicht bekannt ist.

4.1. Darstellung einer Fehlerabschätzung für Aufgaben vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = o$

Wir schätzen den Abstand der Eigenwerte der Aufgaben $\lambda^2 I - \lambda A - B$ und $\tilde{\lambda}^2 I - \tilde{\lambda}\tilde{A} - \tilde{B}$ mit der Konstanten $(\|A - \tilde{A}\|_2^2 + 2\|B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ab. Während die Abschätzung von $\|A - \tilde{A}\|_2^2$ nach herkömmlichen Methoden verläuft, sind für den zweiten Term gesonderte Überlegungen anzustellen, wie den Abschnitten 4.2. und 4.3. zu entnehmen ist.

Voraussetzung 4.1.1.

(1) $(H, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot))$ sei ein separabler Hilbert-Raum über $\mathbb{R}$;

(2) $A, \tilde{A}, B, \tilde{B} \in \mathcal{B}_0(H,H)\setminus\{0\}$;

(3) $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$ selbstadjungiert ;

(4) $B, \tilde{B}$ nicht-negativ ;

(5) Es seien

$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von $\lambda^2 I - \lambda A - B$,

$\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von $\tilde{\lambda}^2 I - \tilde{\lambda}\tilde{A} - \tilde{B}$,

$\{\lambda_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von

$$\lambda^{*2} I - \lambda^*(A-\tilde{A}) - (B^{\frac{1}{2}} - \tilde{B}^{\frac{1}{2}})^2 ,$$

mit der Eigenschaft:

$$\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} : |\lambda_{i+1}| \le |\lambda_i| , \ |\tilde{\lambda}_{i+1}| \le |\tilde{\lambda}_i| , \ |\lambda_{i+1}^*| \le |\lambda_i^*|$$

(wobei jeder Eigenwert so oft hintereinander vorkommt, wie seine geometrische Vielfachheit angibt).

(6) $\{\lambda_i^+\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\lambda}_i^+\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_i^{*+}\}_{i\in\mathbb{N}}$ bezeichne die monotonen Teilfolgen der nichtnegativen,

$\{\lambda_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\lambda}_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_i^{*-}\}_{i\in\mathbb{N}}$ die monotonen Teilfolgen der negativen Glieder der Folgen

$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ (wobei wir

λ_i^+ , $\tilde{\lambda}_i^+$, λ_i^{*+} (bzw. λ_i^- $\tilde{\lambda}_i^-$ λ_i^{*-}) gleich o definieren, falls nur endlich viele positive (bzw. negative) Glieder der Folgen $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ existieren).

Lemma 4.1.2.

Unter den Voraussetzungen 4.1.1. gilt:

$$\bigwedge_{m\in\mathbb{N}_0} : \quad |\lambda_{m+1}^+ - \tilde{\lambda}_{m+1}^+| \le |\lambda_1^*|$$

$$|\lambda_{m+1}^- - \tilde{\lambda}_{m+1}^-| \le |\lambda_1^*|$$

$$\big||\lambda_{m+1}| - |\tilde{\lambda}_{m+1}|\big| \le |\lambda_1^*| \ .$$

Beweis:

Der Aufgabe $\lambda^2 I - \lambda A - B$ ordnet man ein im Parameter lineares Eigenwertproblem zu.

Wir machen den Produktraum $H \times H$ zu einem separablen Hilbert-Raum durch das Skalarprodukt

$$\sigma\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} := (x_1,y_1) + (x_2,y_2) \ .$$

Wenn wir definieren:

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 0 & B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}} & A \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

dann besitzen $\lambda^2 I - \lambda A - B$ und $\mathcal{F} - \lambda\mathcal{J}$ die gleichen von o verschiedenen Eigenwerte.

Wegen 4.1.1.(1) - (4) sind dann die Eigenwerte der drei Folgen aus Voraussetzung 4.1.1.(5) min-max-charakterisierbar. Die Behauptung folgt dann nach dem Satz von WEYL [18].

Um zu einer Schranke für λ_1^* zu gelangen, engen wir die Klasse der zugelassenen Operatoren auf die Schmidt-Klasse ein.

Definition 4.1.3.

Es sei $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbert-Raum H. Wir definieren damit

$$\|\cdot\|_2 : \mathcal{B}(H,H) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

$$T \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|T\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(wenn die Reihe nicht konvergiert definieren wir $\|T\|_2 = +\infty$.) ,

$$\mathcal{B}_2(H,H) := \{T \in \mathcal{B}(H,H) \mid \|T\|_2 < \infty\} .$$

Lemma 4.1.4.

Mit Voraussetzung 4.1.1. und Def. 4.1.3. gilt für $A, \tilde{A}, B^{\frac{1}{2}}, (\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$ (statt Vor. 4.1.1.(2)) :

$$|\lambda_1^*| \leq \left(\|A-\tilde{A}\|_2^2 + 2\|B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis:

Dazu verwenden wir eine Verallgemeinerung des Satzes von SCHUR ([16,p.308]), die lautet:

Es sei

$D \in \mathcal{B}(H,H)$ nicht negativ,

$C,\ D^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$,

C selbstadjungiert;

dann gilt für die Folge der Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (wobei jeder Eigenwert so oft in der Folge vorkommt, wie seine algebraische Vielfachheit angibt) der Aufgabe $\lambda^2 I - \lambda C - D$ die Beziehung:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\lambda_i|^2 \leq \|C\|_2^2 + 2\|D^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \ .$$

Man verifiziert die Voraussetzungen des Zitates für die Aufgabe

$$\lambda^{*2} I - \lambda^*(A-\tilde{A}) - (B^{\frac{1}{2}}-(\tilde{B})^{\frac{1}{2}})^2$$

und erhält dann, wenn $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge ihrer Eigenwerte, aufgelistet nach algebraischer Vielfachheit, darstellt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\xi_i|^2 \leq \|A-\tilde{A}\|_2^2 + 2\|[(B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}})^2]^{\frac{1}{2}}\|_2^2 \ ,$$

da $B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_0(H,H)$ und selbstadjungiert gilt $\|[(B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}})^2]^{\frac{1}{2}}\|_2 = \|B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2$ und damit die Behauptung.

4.2. Gewinnung einer Fehlerabschätzung, falls die Spektraldarstellung von B bekannt ist

In 4.2. und 4.3. setzen wir voraus, daß die Spektraldarstellung von $\tilde{B}$ bekannt sei; im Hinblick auf Anwendungen, in denen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ Näherungsoperatoren an A bzw. B sind, wird diese Voraussetzung häufig erfüllbar sein. Für den hier zu betrachtenden Fall einer bekannten Spektraldarstellung von B geben wir eine Schranke für den Abstand aller Eigenwerte der Aufgaben $\lambda^2 I - \lambda A - B$ und $\tilde{\lambda}^2 I - \tilde{\lambda}\tilde{A} - \tilde{B}$ an. Die Voraussetzung der Kenntnis der Spektraldarstellung von B engt aber die Menge der Eigenwertaufgaben zu stark ein; wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie man ohne Kenntnis der Spektraldarstellung von B noch zu Fehlerabschätzungen gelangen kann.

Satz 4.2.1.

V o r a u s s e t z u n g :

Es sei Voraussetzung 4.1.1. wirksam;

$A, \tilde{A}, B^{\frac{1}{2}}, (\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$;

Es seien $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\beta}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und vollständige Orthonormalsysteme $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $H_\bullet$ mit den Eigenschaften

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \, (\cdot,\varphi_i) \, \varphi_i$$

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\beta}_i \, (\cdot, \tilde{\varphi}_i) \, \tilde{\varphi}_i$$

bekannt.

$\|B^{\frac{1}{2}}\|_2$ und $\|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2$ seien bestimmbar und es sei eine Konstante $\alpha > 0$ bekannt mit $\|A - \tilde{A}\|_2^2 \leq \alpha$.

B e h a u p t u n g :

$$\bigwedge_{p \in \mathbb{N}} : \; S_p := \Big\{ \alpha + 2\big[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2 \sum_{i=1}^{p} (\beta_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} \, (\varphi_i, \tilde{\varphi}_i)^2\big] \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gilt:

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \quad \big| \, |\lambda_i| - |\tilde{\lambda}_i| \, \big| \leq S_p$$

$$\big| \, \lambda_i^+ - \tilde{\lambda}_i^+ \, \big| \leq S_p$$

$$\big| \, \lambda_i^- - \tilde{\lambda}_i^- \, \big| \leq S_p \; .$$

Beweis:

Nach Lemma 4.1.1. gilt

$$|\lambda_1^*| \leq (\|A - \tilde{A}\|_2^2 + 2\|B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2)^{\frac{1}{2}};$$

wenn wir mit $(S,T) := \sum_{i=1}^{\infty} (S\varphi_i , T\varphi_i)$ das innere Produkt bezeichnen, das $\|\cdot\|_2$ erzeugt gilt:

$$\|B^{\frac{1}{2}} - (\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2(B^{\frac{1}{2}} , \tilde{B}^{\frac{1}{2}}) ;$$

mit den Spektraldarstellungen von B und $\tilde{B}$ gilt:

$$(B^{\frac{1}{2}} , \tilde{B}^{\frac{1}{2}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)^2 ;$$

da alle Terme der Doppelsumme positiv sind gilt:

$$|\lambda_1^*| \leq \left(\alpha + 2[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i , \tilde{\varphi}_i)^2]\right)^{\frac{1}{2}}$$

und damit die Behauptung des Satzes.

Bemerkung 4.2.2.

Die Vernachlässigung der Doppelsumme

$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)^2$ gegen die Einfachsumme erscheint im Hinblick auf die Praxis als recht angenehm, denn zur Berechnung von S_p müssen nur p anstatt p^2 Summanden berechnet werden. Andererseits wird man nicht extrem viel Güte der Abschätzung bei dieser Vereinfachung verschenken, wenn man Verfahren wählt, von denen man weiß, daß sie zumindest für gewisse Klassen, brauchbare Näherungen für Eigenfunktionen liefern. Dann kann damit gerechnet werden, daß für die Eigenfunktionen der ersten Eigenwerte $(\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)$ sehr klein ist und damit der Summand $(\beta_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)^2$ unwesentlich wird.

4.3. Gewinnung einer Fehlerabschätzung, falls die Spektraldarstellung von B unbekannt ist

Im Satz 4.3.1. stellen wir Voraussetzungen zusammen, die es erlauben, im hier betrachteten Fall einer nicht bekannten Spektraldarstellung von B, eine Schranke für den Abstand aller Eigenwerte der Aufgaben $\lambda^2 I - \lambda A - B$ und $\tilde{\lambda}^2 I - \tilde{\lambda}\tilde{A} - \tilde{B}$ anzugeben. In den beiden folgenden Korollarien geben wir angenehmere hinreichende Bedingungen.

In 4.2. forderten wir die Kenntnis der Spektraldarstellung von B; hier verlangen wir nur das Vorliegen einer brauchbaren Abschätzung der größten n Eigenwerte von B nach unten und die Kenntnis der Größe der Umgebungen der Eigenfunktionen von $\tilde{B}$, in denen noch die entsprechenden Eigenfunktionen von B liegen.

Satz 4.3.1.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es sei Voraussetzung 4.1.1. wirksam;

(2) $A, \tilde{A}, B^{\frac{1}{2}}, (\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$;

(3) $\|B^{\frac{1}{2}}\|_2$, $\|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2$ seien bestimmbar und sei eine Konstante $\alpha > o$ bekannt mit $\|A - \tilde{A}\|_2^2 \leq \alpha$.

(4) Es seien eine Folge $\{\tilde{\beta}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$ bestimmbar mit

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\beta}_i \, (\cdot, \tilde{\varphi}_i) \, \tilde{\varphi}_i \; ;$$

(5) Es bezeichne $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine (unbekannte) Folge und $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein (unbekanntes) vollständiges Orthonormalsystem von H mit

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \, (\cdot, \varphi_i) \, \varphi_i \; ;$$

(6) Es sei eine Folge $\{\hat{\beta}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ bestimmbar:

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} : \hat{\beta}_i \leq \beta_i \; ;$$

(7) $M := \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid (\varphi_i, \tilde{\varphi}_j) \geq o\}$ und es seien Funktionen f und g bekannt,

$f : \{\varphi_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi}_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$g : \{\varphi_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi}_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}_-$

mit den Eigenschaften:

$$\bigwedge_{(i,j)\ \in\ M} : (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j) \geq f(\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)$$

und

$$\bigwedge_{(i,j)\ \in\ (N\times N)\setminus M} : (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j) \leq g(\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)$$

B e h a u p t u n g :

$$S := \Big\{ \alpha + 2[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2$$

$$- 2 \sum_{\substack{i,j \\ (i,j)\ \in\ M}} (\hat{\beta}_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} [f(\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)]^2$$

$$- 2 \sum_{\substack{i,j \\ (i,j)\ \in\ (N\times N)\setminus M}} (\hat{\beta}_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} [g(\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)]^2] \Big)^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gilt

$$\left| |\lambda_i| - |\tilde{\lambda}_i| \right| \leq S$$

$$\left| \lambda_i^+ - \tilde{\lambda}_i^+ \right| \leq S$$

$$\left| \lambda_i^- - \tilde{\lambda}_i^- \right| \leq S \ .$$

Beweis:

Aus Beweis zu Satz 4.2.1. weiß man:

$$|\lambda_1^*| \leq \Big\{ \|A - \tilde{A}\|_2^2 + 2\big[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i , \tilde{\varphi}_j)^2\big]\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Mit der Voraussetzung (6) , (7) bekommt man

$|\lambda_1^*| \leq S$ und mit Lemma 4.1.2. die Behauptung.

Korollar 4.3.2.

V o r a u s s e t z u n g :

Es seien die Voraussetzungen (1) - (6) von Satz 4.3.1. wirksam;
Es sei eine Folge $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ bestimmbar:

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} : \|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\| \leq c_i ;$$

$$L := \{i \in \mathbb{N} \mid c_i^2 < 2\} ;$$

B e h a u p t u n g :

$$S := \Big\{\alpha + 2\big[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2 \sum_{i \in L} (\hat{\beta}_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} (1 - \tfrac{1}{2} c_i^2)^2\big]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gelten die Abschätzungen in der Behauptung von Satz 4.3.1.

Beweis:

Es gilt Voraussetzung (7) von Satz 4.3.1. durch Festlegung der Abbildungen f , g wie folgt:

$$f : \{\varphi_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi}_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_i, \tilde{\varphi}_j \longmapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}c_i^2 & \text{falls } i = j \text{ und } c_i^2 < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$g : \{\varphi_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi}_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei die o-Funktion.

Korollar 4.3.3.

V o r a u s s e t z u n g :

Es seien die Voraussetzungen (1) - (6) von Satz 4.3.1. wirksam;

$(X, \mathfrak{C}, \mu)$ sei ein Maß-Raum mit

$H = L^2((X, \mathfrak{C}, \mu) , \mathbb{R})$ und

$$(f , g) = \int_X f(x)\, g(x)\, d\mu(x) ;$$

Es seien Folgen $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{map}(X , \mathbb{R}_+)$,

$\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{map}(X , \mathbb{R}_+)$

bestimmbar mit den Eigenschaften:

$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}}$: $l_i \tilde{\varphi}_i$, $u_i \tilde{\varphi}_i$ μ - integrierbar

und

$$\bigwedge_{x \in X} : \tilde{\varphi}_i(x) - l_i(x) \leq \varphi_i(x) \leq \tilde{\varphi}_i(x) + u_i(x) \; ;$$

Dann definieren wir für $i \in \mathbb{N}$:

$$\Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i) : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (\tilde{\varphi}_i(x) - l_i(x))\, \tilde{\varphi}_i(x) & \text{falls } \tilde{\varphi}_i(x) \geq 0 \\ (\tilde{\varphi}_i(x) + u_i(x))\, \tilde{\varphi}_i(x) & \text{falls } \tilde{\varphi}_i(x) < 0 \end{cases}$$

$$L := \{i \in \mathbb{N} \mid \int_X \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, d\mu(x) > 0\} \; ;$$

B e h a u p t u n g :

$$S := \Big\{ \alpha + 2[\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 + \|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 - 2 \sum_{i \in L} (\hat{\beta}_i \beta_i)^{\frac{1}{2}} \Big(\int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, d\mu(x) \Big)^2] \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gelten die Abschätzungen in der Behauptung von Satz 4.3.1. .

Beweis:

Es gilt Voraussetzung (7) von Satz 4.3.1. durch Festlegung der Abbildungen f und g wie folgt:

$$f: \{\varphi_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi}_i \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_i, \tilde{\varphi} \longmapsto \begin{cases} \int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, d\mu(x) \text{ falls } i=j, \int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, d\mu(x) > 0 \\ 0 \qquad\qquad \text{sonst} \end{cases}$$

$$g: \{\varphi \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \times \{\tilde{\varphi} \in H \mid i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei die o - Fkt. .

§ 5 EIN ERSATZKERNVERFAHREN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG DER EIGENWERTAUFGABE $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda)\, A_i$

In diesem Paragraphen schlagen wir ein Verfahren zur genäherten Berechnung der Eigenwerte der Aufgabe $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda)\, A_i$ in $L_2[a,b]$ vor, wobei $A_i : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ Integraloperatoren sind. Für den Spezialfall $\lambda^2 I - \lambda A - B$ werden dann, unter zusätzlichen Voraussetzungen, Schranken für den Abstand der wahren von den genäherten Eigenwerten angegeben. Abschließend demonstrieren wir Verfahren und Abschätzung an einigen Beispielen.

5.1. Darstellung des Verfahrens

In diesem Abschnitt geben wir zwei Algorithmen DISKQ und DISKK an, die einer Eigenwertaufgabe

$g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda) A_i$ im Hilbert-Raum $L_2[a,b]$

($A_i : L_2[a,b] \longrightarrow L_2[a,b]$ sind Integraloperatoren mit einem Kern aus $L_2([a,b] \times [a,b], \mathbb{R})$ und $g, g_i \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$) eine Eigenwertaufgabe

$g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda) \mathcal{C}_i$ im R^{n+1}, mit $\mathcal{C}_i \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$

zuordnen.

Die Algorithmen gewinnt man durch Konstruktion geeigneter Ersatzkerne für die Kerne der Integraloperatoren A_i. HÄMMERLIN [13] hat für den Fall der gewöhnlichen Eigenwertaufgabe bei Integralgleichungen die Konstruktion von Ersatzkernen, und die Auswahl unter den dort betrachteten nach Optimalitätsprinzipien untersucht.

Voraussetzung 5.1.1.

(1) $H := L_2([a,b],\mathbb{R})$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_2$;

(2) $\bigwedge_{k=1,\dots,q}$: $g_k \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $g \in \mathrm{map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(3) $\bigwedge_{k=1,\dots,q}$: $A_k(\cdot,\cdot) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

sei ein Kern aus

$L_2([a,b] \times [a,b],\mathbb{R})$;

(4) $\bigwedge_{k=1,\dots,q}$: $A_k : H \longrightarrow H$

$$u \longmapsto A_k u : [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto \int_a^b A_k(s,t)u(t)\,dt;$$

5.1.2. Algorithmus DISKQ :

Es sei Voraussetzung 5.1.1. wirksam;
Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$;

$$h := \frac{b-a}{n} ;$$

$\bigwedge_{\substack{k=1,\dots,q \\ i,j=0,\dots,n}}$: $A_{k,i,j} := A_k(a+ih\ ,\ a+jh)$;

$\bigwedge_{k=1,\dots,q}$: $\mathcal{A}_k := (A_{k,i,j})_{i,j=0,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$;

$$Q := \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & 0 & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & 0 & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} ;$$

Unter diesen Voraussetzungen ist in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, A_k Q$ eine Eigenwertaufgabe definiert mit Eigenwertparameter $\tilde{\lambda}$; wir bezeichnen diese Aufgabe im $\mathbb{R}^{n+1}$ auch mit $DISKQ(n; g(\lambda)I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\lambda)\, A_k)$.

5.1.3. Algorithmus DISKK:

Es sei Voraussetzung 5.1.1. wirksam;
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ und eine gerade Zahl;

$$h := \frac{b - a}{n} ;$$

$$\bigwedge_{\substack{k=1,\ldots,q \\ i,j=0,\ldots,n}} : A_{k,i,j} := A_k(a+ih\ ,\ a+jh) ;$$

$$\bigwedge_{k=1,\ldots,q} : A_k := (A_{k,i,j})_{i,j=0,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} ;$$

$$K := \frac{h}{15}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & & & & & & \\ 2 & 16 & 2 & 0 & & & & 0 & \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & & & & \\ & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ & 0 & & & & 0 & 2 & 16 & 2 \\ & & & & & & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1};$$

Unter diesen Voraussetzungen ist in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \alpha_k K$ eine Eigenwertaufgabe definiert mit Eigenwertparameter $\tilde{\lambda}$; wir bezeichnen diese Aufgabe im $\mathbb{R}^{n+1}$ auch mit DISKK(n; $g(\lambda)I - \sum_{k=1} g_k(\lambda)\, A_k$) .

Bemerkung:

Die Algorithmen DISKQ und DISKK ordnen einer Eigenwertaufgabe $g(\lambda)I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\lambda)\, A_k$ in $L_2([a,b],\mathbb{R})$ die Eigenwertaufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \alpha_k Q$ bzw. die Eigenwertaufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \alpha_k K$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ zu.

Die spezielle Gestalt der Matrizen Q und K ergibt sich aus Satz 5.1.5. indem wir eine Eigenwertaufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{n} g_k(\tilde{\lambda})\, \tilde{A}_k$ in $L_2([a,b],\mathbb{R})$ angeben mit der Eigenschaft, daß ihre Eigenwerte gleich jenen sind, die die Eigenwertaufgabe DISKQ (bzw. DISKK) im $\mathbb{R}^{n+1}$ besitzt.

Definition 5.1.4.

Es gelte Voraussetzung 5.1.1.;
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$;
Mit den Bezeichnungen von Algorithmus DISKQ definieren wir zu jedem $k = 1, \ldots, q$ Abbildungen
$A_k^{i,j}$, $\tilde{A}_k(\cdot,\cdot)$, $\tilde{A}_k$ wie folgt:

$$\bigwedge_{i,j=0,\ldots,n} : \tilde{A}_k^{i,j} : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s,t) \longrightarrow A_{k,i,j} +$$

$$+ \frac{1}{h}(A_{k,i+1,j} - A_{k,i,j})(s - (a+ih)) +$$

$$+ \frac{1}{h}(A_{k,i,j+1} - A_{k,i,j})(t - (a+jh)) +$$

$$+ \frac{1}{h^2}[A_{k,i+1,j+1} - (A_{k,i+1,j} + A_{k,i,j+1}) + A_{k,i,j}].$$

$$(s - (a+ih))(t - (a+jh)) ;$$

$$\tilde{A}_k(\cdot,\cdot) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s,t) \longmapsto \{\tilde{A}_k^{i,j}(s,t) \quad \text{falls}$$

$$(s,t) \in [a+ih, a+(i+1)h] \times [a+jh, a+(j+1)h] ;$$

$$\tilde{A}_k : H \longrightarrow H$$

$$u \longmapsto \tilde{A}_k u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto \int_a^b \tilde{A}_k(s,t)u(t)\,dt ;$$

Wir bezeichnen diesen Integraloperator auch mit $\mathrm{INTQ}(n;A_k)$.

Satz 5.1.5.

Es gelte Voraussetzung 5.1.1.;
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$;
Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 5.1.3. und 5.1.4.:

$\bigwedge_{\substack{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \\ g(\tilde{\lambda}) \neq 0}}$: $\tilde{\lambda}$ ist Eigenwert der Aufgabe

$$g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \tilde{A}_k \quad \text{in } L_2([a,b],\mathbb{R}) \text{ genau}$$

dann wenn $\tilde{\lambda}$ Eigenwert der Aufgabe

$$g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \alpha_k Q \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1} \text{ ist.}$$

Beweis:

Man sieht sofort: Jede Eigenfunktion $\tilde{f}$ zum Eigenwert $\tilde{\lambda}$ der Aufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \tilde{A}_k$ setzt sich aus Geradenstücken stetig zusammen, für $g(\tilde{\lambda}) \neq 0$. Durch eine Rechnung bestätigt man den Sachverhalt: Es ist $\tilde{\lambda}$ Eigenwert mit einer Eigenfunktion $\tilde{f}$ der Aufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \tilde{A}_k$ genau dann wenn gilt:

$$\bigwedge_{i=0,\ldots,n} : g(\tilde{\lambda})\tilde{f}(a+ih) + \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda}) \Big\{ \frac{h}{6}[2A_{k,i,0}+A_{k,i,1}]f(a)$$

$$+ \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{n-1}[A_{k,i,j-1}+4A_{k,i,j}+A_{k,i,j+1}]f(a+jh)$$

$$+ \frac{h}{6}[A_{k,i,n-1} + 2A_{k,i,n}]f(b) \Big\} = 0 ;$$

diese Eigenwertaufgabe läßt sich wieder auf eine elegantere Art so

$$g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda})\, \alpha_k Q$$

darstellen.

Bemerkung:

Mit dem letzten Satz 5.1.5. erkennt man also, daß die Eigenwerte von $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda}) a_k Q$ mit $g(\tilde{\lambda}) \neq o$ die Eigenwerte der Aufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{k=1}^{q} g_k(\tilde{\lambda}) \tilde{A}_k$ sind wobei die $\tilde{A}_k$ durch eine Näherung $\tilde{A}_k(\cdot,\cdot)$ an die Kerne $A_k(\cdot,\cdot)$ definiert sind. Ein analoger Sachverhalt läßt sich für DISKK aussprechen. In beiden Fällen wird der Kern $\tilde{A}_k(\cdot,\cdot)$ dadurch konstruiert, daß man $[a,b]\times[a,b]$ in n^2 gleichgroße, quadratische Maschen der Seitenlänge $h = (b - a)\frac{1}{n}$ einteilt; in Satz 5.1.5. haben wir dann über jeder Masche das Interpolationspolynom 1-ten Grades in s und t mit Stützstellen in den Maschenecken als $\tilde{A}_k(\cdot,\cdot)$ verwendet; zur Herleitung von DISKK benötigt man den Kern der durch Interpolation 2-ten Grades in s und t über Quadrate aus 4 Maschen besteht mit Stützstellen in den Maschenecken.

5.2. Fehlerabschätzung für den Spezialfall $\lambda^2 I - \lambda A - B$ bei Anwendung der Näherungsmethoden aus 5.1.

Die Näherungsmethoden des vorigen Abschnittes liefern zwar für den Aufgabentyp $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda)\, A_i$ Eigenwerte $\tilde{\lambda}$ einer Aufgabe $g(\tilde{\lambda})I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\tilde{\lambda})\, \tilde{A}_i$, aber keine Aussage darüber wie weit diese Näherung $\tilde{\lambda}$ von den Eigenwerten λ des vorgelegten Problems $g(\lambda)I - \sum_{i=1}^{q} g_i(\lambda)\, A_i$ entfernt sind. In §4 haben wir für die Aufgabenklasse $\lambda^2 I - \lambda A - B$ bereits Fehlerbetrachtungen für recht allgemeine Näherungsaufgaben angestellt. Es wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß sich die Näherungsmethode Algorithmus DISKQ aus 5.1. in diesen Rahmen einfügt, weil bei ihr die Forderungen nach dem Wohlverhalten, die in 4.3.2. und 4.3.3. gestellt wurden, verifizierbar sind; analoge Korollarien gelten für Algorithmus DISKK.
Dies ist möglich, weil man auf die praktikablen Schranken von HÄMMERLIN [13] zurückgreifen kann. Da wie in §4 die Kenntnis der Spektraldarstellung von B nicht allgemein angenommen werden kann, haben wir hier für den komplementären Fall auf Forderungen über den Kern von B und die Vielfachheit seiner Eigenwerte zurückgegriffen (siehe folgende Obersicht).

Übersicht über die Korollarien in 5.2.

Nummer des Korollars	Voraussetzungen an B zusätzlich zu 5.2.1.	Nummer des verwendeten Satzes aus §4
5.2.3.	Spektraldarstellung von B bekannt; $B(\cdot,\cdot)$ stetig im Mittel; $B(\cdot,\cdot)\|_{\Delta[a,b]}$ stetig;	4.2.1.
5.2.4. (5.2.6)	$B(\cdot,\cdot) \in C^4([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$; $\tilde{\beta}_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ einfach;	4.3.2. (4.3.3.)
5.2.5. (5.2.7.)	$B(\cdot,\cdot)\in C^4([a,b]\times[a,b]\setminus\Delta[a,b],\mathbb{R})$ $\cap\, C([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$; $\tilde{\beta}_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ einfach;	4.3.2. (4.3.3.)

Bemerkung:

Während wir im Korollar 5.2.3. die Kenntnis der Spektraldarstellung fordern, verzichten wir in allen folgenden Korollarien darauf.

Voraussetzung 5.2.1.

(1) $H := L_2([a,b],\mathbb{R})$;

(2) $A(\cdot,\cdot) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und

$B(\cdot,\cdot) : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

seien symmetrische Kerne aus $L_2([a,b] \times [a,b],\mathbb{R})$;

(3) $A : H \longrightarrow H$

$u \longmapsto Au : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s \longmapsto \int_a^b A(s,t)u(t)\,dt$$

und

$B : H \longrightarrow H$

$u \longmapsto Au : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$s \longmapsto \int_a^b B(s,t)u(t)\,dt$$

seien die entsprechenden Integraloperatoren;

(4) B sei nicht negativ;

(5) $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sei die Folge der Eigenwerte von $\lambda^2 I - \lambda A - B$ mit der Eigenschaft $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} : |\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i|$, (wobei jeder Eigenwert so oft hintereinander vorkommt, wie seine geometrische Vielfachheit angibt);

(6) $n \in \mathbb{N}$ sei fest vorgegeben;

(7) $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^{2n+2}$ seien die Eigenwerte der Aufgabe DISKQ(n; $\lambda^2 I - \lambda A - B$) im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Eigenschaft: $\bigwedge_{i=1,\ldots,2n+1} : |\tilde{\lambda}_{i+1}| \leq |\tilde{\lambda}_i|$, (wobei jeder Eigenwert so oft hintereinander vorkommt, wie seine geometrische Vielfachheit angibt).

$\bigwedge_{i \in \mathbb{N},\ i > 2n+2} : \tilde{\lambda}_i := 0$.

$\{\tilde{\lambda}_i^+\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\tilde{\lambda}_i^-\}_{i\in\mathbb{N}}$ bezeichne die monotone Teilfolge der nichtnegativen bzw. der negativen Glieder der Folge $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, (wobei wir $\tilde{\lambda}_i^+$, $\tilde{\lambda}_i^-$ gleich 0 definieren, falls höchstens endliche viele positive bzw. negative Glieder der Folge $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ existieren);

(8) $\{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^{n+1} \subseteq \mathbb{R}$ seien die Eigenwerte der Aufgabe DISKQ(n; $\beta I - B$) mit der Eigenschaft: $\bigwedge_{i=1,\ldots,n} : \tilde{\beta}_{i+1} \leq \tilde{\beta}_i$, (wobei jeder Eigenwert so oft hintereinander vorkommt, wie seine geometrische Vielfachheit angibt).

$\{\vec{\tilde{\varphi}}_i\}_{i=1}^{n+1}$ sei ein zugehöriges ONS aus Eigenvektoren $\left(\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : \vec{\tilde{\varphi}}_i = (\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \ldots, \varphi_{i,n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \right)$;

(9) Mit n von Voraussetzung 5.2.1.(6) ist nach Algorithmus DISKQ die Größe h festgelegt und wir definieren:

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : g_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto \left\{ \tilde{\varphi}_{i,j} + \frac{1}{h}(\tilde{\varphi}_{i,j+1} - \tilde{\varphi}_{i,j})(s - s_j) \right.$$

falls $s \in [a+jh, a+(j+1)h]$ mit

$0 \leq j \leq n-1$;

und

$$\tilde{\varphi}_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longmapsto g_i(s) \cdot (\|g_i\|_2)^{-1} ;$$

(10) $$\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : \tilde{\beta}_i \geq 0 ;$$

(11) $$\bigwedge_{i,j=0,\ldots,n} : B_{i,j} := B(a + ih , a + jh) ;$$

(12) Es sei eine Konstante $\alpha > 0$ bekannt mit
$\|A - \tilde{A}\|_2^2 = \int_a^b \int_a^b |A(s,t) - \tilde{A}(s,t)|^2 \, ds \, dt < \alpha$, wobei
$\tilde{A}$:= INTQ(n ; A) (laut 5.1.4.) jenen Integraloperator bezeichnet, dessen von 0 verschiedene Eigenwerte mit denen der Aufgabe DISKQ(n ; λI - A) übereinstimmen.

Definition 5.2.2.

$B : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Mittel genau dann wenn gilt:

$$\bigwedge_{x_1 \in [a,b]} : \lim_{x_2 \to x_1} \int_a^b |B(x_2,y) - B(x_1,y)|\, dy = 0$$

und

$$\bigwedge_{y_1 \in [a,b]} : \lim_{y_2 \to y_1} \int_a^b |B(x,y_2) - B(x,y_1)|\, dx = 0 .$$

Korollar 5.2.3.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 5.2.1.;

(2) Der Kern $B(\cdot,\cdot)$ sei stetig im Mittel und $B(\cdot,\cdot)\big|_{\Delta[a,b]}$ sei stetig;

(3) Es sei die Folge $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und ein VONS $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in H mit der Eigenschaft $B=\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(\cdot,\varphi_i)\,\varphi_i$ bekannt;

B e h a u p t u n g :

$$\bigwedge_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \le n+1}} : S_p := \left\{ \alpha + 2 \left[\int_a^b B(s,s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ B_{ii} \cdot h + \right. \right. \right.$$

$$+ (B_{i+1,i} - 2B_{i,i} + B_{i,i+1}) \cdot \frac{h}{2} +$$

$$\left. + (B_{i+1,i+1} - B_{i+1,i} - B_{i,i+1} + B_{ii}) \frac{h}{3} \right\}$$

$$\left. \left. -2 \sum_{i=1}^{p} (\beta_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \varphi_i(x)\, \tilde{\varphi}_i(x)\, dx \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gilt:

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} : \left| |\lambda_i| - |\tilde{\lambda}_i| \right| \le S_p$$

$$\left| \lambda_i^+ - \tilde{\lambda}_i^+ \right| \le S_p$$

$$\left| \lambda_i^- - \tilde{\lambda}_i^- \right| \le S_p \ .$$

Beweis:

5.2.3. ist eine Folgerung von Satz 4.2.1. .
Verifizierung der Vor. 4.1.1.:
A,B selbstadjungiert nach 5.2.1.(2);
$\tilde{A}$:= INTQ(n;A) , $\tilde{B}$:= INTQ(n;B) selbstadjungiert,
da $A(\cdot,\cdot)$, $B(\cdot,\cdot)$ nach 5.2.1. symmetrisch sind und
5.1.4. geeignet gewählt;
B nicht negativ nach 5.2.1.(4)
$\tilde{B}$ nicht negativ, denn $\tilde{B}$ kompakt, selbstadjungiert
erlaubt eine Spektraldarstellung, wobei die von o

verschiedenen Eigenwerte mit $\{\tilde{\beta}_i\}_{i=1}^{n+1}$ übereinstimmen und nach 5.2.1.(10) $\tilde{\beta}_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ gilt;

$A \in \mathcal{B}_2(H,H)$ wegen 5.2.1.(2) : $A(\cdot,\cdot) \in L_2([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$;

$\tilde{A} \in \mathcal{B}_2(H,H)$ da $\tilde{A}$ einen stetigen Kern hat;

$B^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$ gilt, denn 5.2.3.(2) und 5.2.1.(4) und die Symmetrie machen $B(\cdot,\cdot)$ zu einem MERCER-Kern [5,p.536] für den $\int_a^b B(x,x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ gilt, woraus mit $\|B^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ die Behauptung folgt;

$(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}_2(H,H)$ erhält man ebenso;

nebenbei bekommt man damit auch einen numerisch gut behandelbaren Ausdruck für die Normen:

$$\|(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \int_a^b \tilde{B}(s,s)\,ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} B_{ii} \cdot h + (B_{i+1,i} - 2B_{i,i} + B_{i,i+1}) \cdot \frac{h}{2} +$$

$$+ (B_{i+1,i+1} - B_{i+1,i} - B_{i,i+1} + B_{i,i}) \cdot \frac{h}{3} ;$$

Damit sind die Voraussetzungen von 4.2.1. nachgewiesen.

Korollar 5.2.4.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 5.2.1.;

(2) $B(\cdot,\cdot)$ sei 4-mal stetig partiell differenzierbar;

(3) $N_{s^i t^j} := \max_{s,t \in [a,b]} \left| \frac{\partial^{i+j} B(s,t)}{\partial s^i \, \partial t^j} \right|$ für $i+j \leq 4$;

(4) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1}$: $\tilde{\beta}_i$ einfach;

(5) $p_1 := 0{,}175 h^2 (N_{ss} + 0{,}0477\, h^2 N_{sstt})\,(b-a)$;

(6) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1}$: $d_i :=$
$\max\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \{\beta_j \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \tilde{\beta}_i| < r\} = \{\tilde{\beta}_i\} \right\}$ wobei $\beta_j := 0$ für $j \geq n+2$;

(7) $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}}$: $c_i := \begin{cases} \dfrac{p_1}{d_i \sqrt{1-2\frac{p_1}{d_i}}} \left(1 + \dfrac{p_1}{2 d_i \sqrt{1-2\frac{p_1}{d_i}}} \right) & \text{falls } \frac{p_1}{d_i} < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$;

(8) $L := \{ i \in \mathbb{N} \mid \dfrac{p_1}{d_i} < \dfrac{1}{2} \;;\; c_i^2 < 2 \}$;

(9) $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}}$: $\tilde{\beta}_i := \begin{cases} \tilde{\beta}_i - p_1 & \text{falls } \tilde{\beta}_i - p_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$;

B e h a u p t u n g :

$$S := \Bigg\{\alpha + 2\Bigg[\int_a^b B(s,s)\,ds + \sum_{i=0}^{n-1}\Big\{B_{ii}\cdot h + (B_{i+1,i} - 2B_{i,i} + B_{i,i+1})\cdot\frac{h}{2} + (B_{i+1,i+1} - B_{i+1,i} - B_{i,i+1} + B_{i,i})\frac{h}{3}\Big\} - 2\sum_{i\in L}^{p}(\hat{\beta}_i\tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}}(1 - 2c_i^2)^2\Bigg]\Bigg\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gilt:

$$\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} : \Big||\lambda_i| - |\tilde{\lambda}_i|\Big| \le S\,,$$

$$\Big|\lambda_i^+ - \tilde{\lambda}_i^+\Big| \le S\,,$$

$$\Big|\lambda_i^- - \tilde{\lambda}_i^-\Big| \le S\,.$$

Beweis:

Hier liegt eine Anwendung des Satzes 4.3.2. vor. Die unter 5.2.4.(5) definierte Größe P1 wurde von HÄMMERLIN [13] (S.449, Formel (11.2.5.)) angegeben. Dadurch erfüllen die $\hat{\beta}_i$ nach 5.2.4.(9) die Forderung 4.3.1.(6). Die Konstruktion der c_i beruht auf der von HÄMMERLIN, in [13] S.455 angegebenen Formel (15.1.).

Bemerkung:

In der unter 5.2.4.(5) genannten Konstante kann man nach HÄMMERLIN auch folgende Schranke verwenden:

$$p_1 := 0{,}0913\, h^2 \left[\sum_{i,j=0}^{n-1} h^2 \left(N_{ss}^{ij} + N_{tt}^{ij} + 0{,}0913\, h^2 N_{sstt}^{ij} \right) \right]$$

wobei $N_{s^k,t^l}^{i,j} := \underset{\substack{s \in [a+ih,a+(i+1)h] \\ t \in [a+jh,a+(j+1)h]}}{\text{maximum}} \left| \frac{\partial^{k+1} B(s,t)}{\partial s^k\, \partial t^l} \right| .$

Korollar 5.2.5.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 5.2.1.;

(2) $B(\cdot,\cdot) \in C^4([a,b]\times[a,b]\setminus\Delta[a,b],\mathbb{R}) \cap C([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$;

(3) $N_{s^i t^j} := \max \left\{ \left| \frac{\partial^{i+j} B(s,t)}{\partial s^i\, \partial t^j} \right| \,\middle|\, (s,t) \in [a,b]\times[a,b]\setminus\Delta[a,b] \right\}$

für $i + j \le 4$;

$$N_t^{(1)} := \max \left\{ \left| \frac{\partial B(s,t)}{\partial t} \right| \,\middle|\, s,t \in [a,b] \; ; \; s \le t \right\}$$

$$N_t^{(2)} := \max \left\{ \left| \frac{\partial B(s,t)}{\partial t} \right| \,\middle|\, s,t \in [a,b] \; ; \; t \le s \right\} ;$$

(4) $\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : \tilde{\beta}_i$ einfach;

(5) $p_1 := \frac{1}{3\sqrt{10}}\, h^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[N_t^{(1)} + N_t^{(2)} + h\left(\frac{\sqrt{3}}{2} N_{ss} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{tt} + N_{st} \right) \right]^2 (b-a) \right.$

$$\left. + \frac{3}{4} h \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left[N_{ss} + N_{tt} + \frac{h^2}{2\sqrt{30}} N_{sstt} \right]^2 (b-a)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ;$$

(6) Es gelte Voraussetzung 5.2.4.(6) - (9);

B e h a u p t u n g :

Wie in Korollar 5.2.4. .

Beweis:

Wie beim Korollar 5.2.4. liegt hier eine Anwendung des Satzes 4.3.2. vor; da der Kern mit Ausnahme der Diagonale 4-mal stetig partiell differenzierbar ist, muß für p_1 die von HÄMMERLIN, S.452, Formel (13.1), angegebene Formel benutzt werden.

Korollar 5.2.6.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) es gelte Voraussetzung 5.2.4.(1) - (7) und 5.2.4.(9);

(2) $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}}$ definieren wir:

$l_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

$$x \longmapsto \begin{cases} (\tilde{\beta}_i - 2p_1)^{-1} \left\{ (c_i + p_1 (\tilde{\beta}_i - p_1)^{-1}) \left[\int_a^b |B(x,t)|^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \left[\int_a^b |B(x,t) - \tilde{B}(x,t)|^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \right\} & \text{falls } \tilde{\beta}_i - 2p_1 > 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$u_i := l_i$; ($\tilde{B}(\cdot,\cdot)$ ist Kern des Operators INTQ(n;B) (Def. 5.1.4.));

(3) $L := \{i \in \mathbb{N} \mid \frac{p_1}{d_i} < \frac{1}{2} \; ; \int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, dx > 0\}$

mit der Definition von Φ aus 4.3.3. .

B e h a u p t u n g :

$$S := \Big\{ \alpha + 2 \Big[\int_a^b B(s,s)\, ds + \sum_{i=0}^{n-1} B_{ii} \cdot h + (B_{i+1,i} - 2B_{i,i} + B_{i,i+1}) \frac{h}{2} + (B_{i+1,i+1} - B_{i+1,i} - B_{i,i+1} + B_{i,i}) \frac{h}{3} - 2 \sum_{i \in L} (\hat{\beta}_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} \Big(\int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, dx \Big)^2 \Big] \Big\}^{\frac{1}{2}}$$

ist bestimmbar und es gilt:

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} : \quad \big| |\lambda_i| - |\tilde{\lambda}_i| \big| \le S$$

$$\big| \lambda_i^+ - \tilde{\lambda}_i^+ \big| \le S$$

$$\big| \lambda_i^- - \tilde{\lambda}_i^- \big| \le S \; .$$

Beweis:

Dieses Korollar ist eine Anwendung des Satzes 4.3.3. . Die Voraussetzung 5.2.6.(2) geht auf die Schranke von HÄMMERLIN zurück (S.456, Formel (17.2.2.)).

Korollar 5.2.7.

V o r a u s s e t z u n g :

(1) Es gelte Voraussetzung 5.2.5.(1) - (5) und Voraussetzung 5.2.4.(6), (7), (9);

(2) $$R := \Big\{ [(N_{ss} + N_{tt}) \cdot \frac{h^2}{8} + N_{sstt}\frac{h^4}{64}]^2 \cdot h(n-1) + (N_{ss})^2 \frac{h^5}{64} + [N_{st} + \frac{1}{h}(N_t^{(1)} + N_t^{(2)})]^2 \frac{h^5}{3} + (N_{tt})^2 \frac{h^5}{120} \Big\}^{\frac{1}{2}} ;$$

(3) $\bigwedge_{i \in \mathbb{N}}$ definieren wir:

$$l_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (\tilde{\beta}_i - 2p_1)^{-1} \Big\{ (c_i + p_1(\tilde{\beta}_i - p_1)^{-1}) \Big[\int_a^b |B(x,t)|^2 dt \Big]^{\frac{1}{2}} + R \Big\} & \text{falls } \tilde{\beta}_i - 2p_1 > 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$u_i := l_i$;

(4) $L := \{i \in \mathbb{N} \mid \frac{p_1}{d_i} < \frac{1}{2} ; \int \Phi(\tilde{\varphi}_i, u_i, l_i)\, dx > 0\}$

mit der Definition von Φ aus 4.3.3. .

B e h a u p t u n g :

Wie Korollar 5.2.6. .

Beweis:

$\left\{\int_a^b |B(s,t) - \tilde{B}(s,t)|^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leq R$ kann durch Rechnung bestätigt werden, wenn $\tilde{B}(s,t)$ der Kern des Integraloperators INTQ(n;B) ist.

Mit den beiden folgenden Abschätzungen bekommt man R :

$$\bigwedge_{\substack{i,j=0,\ldots,n-1 \\ i \neq j}} : \bigwedge_{s \in [s_i, s_{i+1}]} : \int_{s_j}^{s_{j+1}} |B(s,t)-\tilde{B}(s,t)|^2\, dt \leq$$

$$\left|(N_{ss}+N_{tt})\frac{h^2}{8} + N_{sstt}\frac{h^4}{64}\right|^2 \cdot h ;$$

$$\bigwedge_{i=0,\ldots,n-1} : \bigwedge_{s \in [s_i, s_{i+1}]} : \int_{s_i}^{s_{i+1}} |B(s,t)-\tilde{B}(s,t)|^2\, dt \leq$$

$$(N_{ss})^2 \frac{h^5}{64} + \left|N_{st} + \frac{1}{h}(N_t^{(1)} + N_t^{(2)})\right|^2 \cdot \frac{h^5}{3} +$$

$$+ (N_{tt})^2 \frac{h^5}{120} ;$$

dabei ist $s_i := a + i \cdot h$. Die erste Abschätzung folgt aus der Restglieddarstellung der Interpolation, die zweite aus einer Abschätzung für $|B(s,t) - \tilde{B}(s,t)|$ falls $s,t \in [s_i,s_{i+1}] \times [s_i,s_{i+1}]$ ist, nach HÄMMERLIN, S.451.

Bemerkung 5.2.8.

Wenn $A(\cdot,\cdot) \in C^4([a,b] \times [a,b] , \mathbb{R})$ oder $A(\cdot,\cdot) \in C^4([a,b] \times [a,b] \setminus \Delta [a,b] , \mathbb{R}) \cap C([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ gilt, gibt HÄMMERLIN Schranken für $\|A - \tilde{A}\|_2$ an; damit ist Voraussetzung 5.2.1.(12) berechtigt.

Lemma 5.2.9.

V o r a u s s e t z u n g :

$B(\cdot,\cdot) \in C([a,b] \times [a,b] , \mathbb{R})$ symmetrischer Oszillationskern;

B e h a u p t u n g :

5.2.1.(4) (d.h. B nicht negativ) gilt;

5.2.1.(10) (d.h. $\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : \tilde{\beta}_i \geq 0$) gilt falls $n > 1$.

Beweis:

Ein Integraloperator mit einem Oszillationskern hat nur positive Eigenwerte; mit der Symmetrie von $B(\cdot,\cdot)$ ergibt sich 5.2.1.(4). Für den Oszillationskern $B(\cdot,\cdot)$ gilt: Die Eigenwerte für $n > 1$ der Matrix $B_{ij})_{i,j=0}^{n}$ sind alle positiv. $(B_{ij})_{i,j=0}^{n}$ ist symmetrisch, also positiv definit; Q ist positiv definit; als Produkt positiv definiter Matrizen hat $(B_{ij})_{i,j=0}^{n}$ Q nur positive Eigenwerte [6,p.116], welche $\tilde{\beta}_i$ (i=1, ..., n+1) sind.

Bemerkung 5.2.10.

In den Korollarien 5.2.4., 5.2.5., 5.2.6., 5.2.7., haben wir vorausgesetzt: $\bigwedge_{i=1,\ldots,n+1} : \tilde{\beta}_i$ einfacher Eigenwert.

Wenn $B(\cdot,\cdot) \in C([a,b] \times [a,b], \mathbb{R})$ ein symmetrischer Oszillationskern ist, hat er nur positive einfache Eigenwerte; die $\tilde{\beta}_i$ (i=1, ..., n+1) sind Näherungen für die wahren Eigenwerte, also kann erwartet werden, daß sie auch einfach sind.

5.3. Beispiele

In diesem Abschnitt werden die Resultate von 5.1. und 5.2. auf folgende Eigenwertaufgaben angewandt:

BEISPIEL I :

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^{2\pi} (\pi - |\pi - |s-t||)\, u(t)\, dt - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi - |s-t|)^2\, u(t)\, dt = 0 .$$

BEISPIEL II :

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^1 \min(s,t) u(t)\, dt - \int_0^1 \min(s,t) u(t)\, dt = 0 .$$

BEISPIEL III :

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^1 \left(1 + \exp(-\tfrac{1}{2}(s+t))\right) u(t)\, dt - \int_0^1 \left(1 + \exp(-(s+t))\right) u(t)\, dt = 0 .$$

BEISPIEL IV :

$$\varphi(s) + \lambda^2 \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^2\, \frac{g(t)}{B}\, dt +$$

$$+ \lambda \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^3\, \frac{\varphi(t)}{B}\, dt + \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^4\, \frac{\varphi(t)}{B}\, dt = 0 ;$$

$$\text{mit } G(s,t) := \begin{cases} t - 1 & \text{falls } 0 \le s \le t \le 1 \\ s - 1 & \text{falls } 0 \le t \le s \le 1 \,. \end{cases}$$

Die Ergebnisse wurden an der Rechenanlage TELEFUNKEN TR440 des LEIBNIZ-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, ermittelt. Den beiden Damen H.DAMEK und D.STERNAGL, und Herrn MASSOPUST danke ich für ihre gewissenhafte Hilfe bei der Programmierarbeit.

Allgemeine Bemerkungen

In BEISPIEL I haben wir den Fall vorliegen, daß eine Fehlerabschätzung nur unter Verwendung der Spektraldarstellung von $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(\pi - |s-t|)^2 u(t)\,dt$ möglich ist.

In BEISPIEL II stellen wir die 3 Typen von Schranken, die wir in 5.2. angegeben haben, nebeneinander. Die Schranken liegen alle sehr weit über dem wahren Fehler für den betragsgrößten Eigenwert. So ergibt sich für $n = 20$, nach 5.2.3. eine Schranke, die 390 mal größer ist, als der wahre Fehler $|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1|$, während für $|\lambda_6 - \tilde{\lambda}_6|$, $|\lambda_9 - \tilde{\lambda}_9|$ der Oberschätzungsfaktor deutlich unter 100 liegt. Hier zeigt sich ein Nachteil, den eine Schranke für alle Werte $|\lambda_i - \tilde{\lambda}_i|$ mit sich bringt. Was nach Konstruktion der Schranken, in denen man nicht die Kenntnis der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators B voraussetzt, zu erwarten ist, wird bestätigt: diese Schranken sind größer als die Schranke nach 5.2.3... Eine Betrachtung der Zusammensetzung der Schranke nach 5.2.3. läßt erwarten, daß die Berücksichtigung der Doppelsumme (siehe Beweis zu 4.2.1.) noch eine wesentliche Verkleinerung der Schranke einbringen würde.

In BEISPIEL III sind die auftretenden Kerne hinreichend oft differenzierbar, was im allgemeinen bessere Fehlerschranken erlauben dürfte.

Mit BEISPIEL IV greifen wir auf die Einleitung zurück. Dort haben wir diese Eigenwertaufgabe im Zusammenhang mit einer physikalischen Fragestellung erwähnt. Hier bestimmen wir den größten positiven Eigenwert und erhalten damit die Kipplast bei vorgegebenen Materialkonstanten.

BEISPIEL I

In $L_2([0,2\pi],R)$ sei die Eigenwertaufgabe

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^{2\pi} (\pi - |\pi - |s-t||)u(t)\,dt$$

$$- \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}(\pi - |s-t|)^2 u(t)\,dt = 0$$

vorgelegt.

Der Integraloperator $\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}(\pi - |s-t|)^2 u(t)\,dt$ ist positiv, aber außer dem betragsgrößten Eigenwert, sind alle kleineren von doppelter Vielfachheit; aus diesem Grunde kann eine Fehlerabschätzung nicht nach 5.2.5. oder 5.2.6. sondern nur nach 5.2.3. erfolgen, denn die Näherungswerte $\tilde{\beta}_i$ treten auch mit der geometrischen Vielfachheit 2 auf.

Wir geben für dieses Beispiel den Nachweis, daß für steigende n eine numerische Konvergenz des betragsgrößten Näherungswertes der beiden Algorithmen DISKQ und DISKK gegen den wahren betragsgrößten Eigenwert eintritt; da die Kerne dieses Beispiels nicht differenzierbar sind, liefert DISKQ bessere Näherungen als DISKK.

Eine kurze Betrachtung zeigt:
Wahrer betragsgrößter Eigenwert $\lambda_1 = 1.036\,803 \cdot 10^1$.

n	$\tilde{\lambda}_1$ mit DISKQ	$\tilde{\lambda}_1$ mit DISKK
20	$1.037\,040 \cdot 10^1$	$1.037\,105 \cdot 10^1$
40	$1.036\,862 \cdot 10^1$	$1.036\,878 \cdot 10^1$
60	$1.036\,829 \cdot 10^1$	$1.036\,836 \cdot 10^1$

BEISPIEL II

In $L_2[0,1]$ ist die Eigenwertaufgabe

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^1 \min(s,t)u(t)\,dt - \int_0^1 \min(s,t)u(t)\,dt = 0$$

vorgelegt.

Da alle Eigenwerte vom Integraloperator $\int_0^1 \min(s,t)u(t)\,dt$ bekannt sind, kann man hier den wahren Fehler beim betragsgrößten Eigenwert,

die Abschätzung nach Korollar 5.2.3.,

die Abschätzung nach Korollar 5.2.5.,

die Abschätzung nach Korollar 5.2.7.,

nebeneinander stellen.

Da $\min(s,t)$ kein Kern aus $C^4([a,b]\times[a,b],\mathbb{R})$ ist, können hier Korollar 5.2.4. bzw. 5.2.6. nicht angewandt werden.

Die Abschätzungen errechnen sich alle als die Wurzel aus einer Summe deren erster Teil α lautet; dieser Teil α ist stets klein gegenüber dem zweiten Summanden ($\alpha=h^3/90$ Laut HÄMMERLIN S.452) im vorliegenden Beispiel.

Das wollen wir im Fall der Abschätzung nach Korollar 5.2.3. in der folgenden Tabelle aufschreiben:

Dabei sei $\alpha := \frac{h^3}{90}$ und $\beta := 2 \left[\int_a^b B(s,s)\, ds + \right.$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \{B_{ii} \cdot h + (B_{i+1,i} - 2B_{i,i} + B_{i,i+1}) \cdot \frac{h}{2}$$

$$+ (B_{i+1,i+1} - B_{i+1,i} - B_{i,i+1} + B_{ii}) \frac{h}{3} \}$$

$$\left. - 2 \sum_{i=1}^{n+1} (\beta_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b \varphi_i(x)\, \tilde{\varphi}_i(x)\, dx \right]^2 \right]$$

und $S_n := (\alpha + \beta)^{\frac{1}{2}}$;

n	α	β	nach KOROLLAR 5.2.3. S_n
20	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$
40	$1.75 \cdot 10^{-7}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$	$7.95 \cdot 10^{-2}$
60	$5.15 \cdot 10^{-8}$	$4.21 \cdot 10^{-3}$	$6.48 \cdot 10^{-2}$
80	$2.18 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$	$5.62 \cdot 10^{-2}$
100	$1.11 \cdot 10^{-8}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$5.12 \cdot 10^{-2}$

Im Beweis zu Satz 4.2.1. haben wir bei der Herleitung der dort angegebenen Schranke die Doppelsumme $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_j)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i, \tilde{\varphi}_j)^2$ gegen die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i \tilde{\beta}_i)^{\frac{1}{2}} (\varphi_i, \tilde{\varphi}_i)^2$ abgeschätzt, was uns auch allgemein ein großes β einbringen dürfte.

n	$\tilde{\lambda}_1$	ABSCHÄTZUNG nach KOROLLAR 5.2.3.: S_n	ABSCHÄTZUNG nach KOROLLAR 5.2.5.	ABSCHÄTZUNG nach KOROLLAR 5.2.7.
20	0.870 444	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$3.45 \cdot 10^{-1}$	$6.05 \cdot 10^{-1}$
40	0.870 662	$7.95 \cdot 10^{-2}$	$2.86 \cdot 10^{-1}$	$5.14 \cdot 10^{-1}$
60	0.870 703	$6.48 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$	$4.83 \cdot 10^{-1}$
80	0.870 717	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$2.38 \cdot 10^{-1}$	$4.58 \cdot 10^{-1}$
100	0.870 724	$5.12 \cdot 10^{-2}$	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$4.38 \cdot 10^{-1}$

Wahrer betragsgrößter Eigenwert $\lambda_1 = 0.870\ 735$

BEISPIEL III

In $L_2[0,1]$ sei die Eigenwertaufgabe

$$\lambda^2 u(s) - \lambda \int_0^1 (1+e^{-\frac{1}{2}(s+t)})u(t)\,dt - \int_0^1 (1+e^{-(s+t)})u(t)\,dt = 0$$

vorlegt.

Im Gegensatz zu Beispiel I und II legen hier Kerne aus $C^4([a,b] \times [a,b], \mathbb{R})$ vor. So können in diesem Fall die Korollarien 5.2.3., 5.2.4., 5.2.6. angewendet werden. Die Werte für α bestimmen wir nach HÄMMERLIN (S.449, Formel 11.2.5.) mit der Formel

$$\alpha = [0.175\, h^2(\tfrac{1}{4} + 0.477 \cdot h^2 \cdot \tfrac{1}{16})]^2 .$$

$\tilde{\lambda}_1$ sei mit DISKQ gewonnen.

n	$\tilde{\lambda}_1$	ABSCHÄTZUNG nach KOROLLAR 5.2.7.
20	2.250 206	$3.78 \cdot 10^{-2}$
40	2.250 123	$1.87 \cdot 10^{-2}$
60	2.250 107	$1.25 \cdot 10^{-2}$
80	2.250 102	$9.34 \cdot 10^{-3}$
100	2.250 099	$7.46 \cdot 10^{-3}$

BEISPIEL IV

In $L_2[0,1]$ sei die Eigenwertaufgabe

$$\varphi(s) + \lambda^2 \frac{1}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^2 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt +$$

$$+ \lambda \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^3 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt +$$

$$+ \frac{g^2}{C} \int_0^1 G(s,t)\, t^4 \frac{\varphi(t)}{B}\, dt = 0$$

$$\text{mit } G(s,t) := \begin{cases} t - 1 & \text{falls } 0 \le s \le t \le 1 \\ s - 1 & \text{falls } 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

vorgelegt.

Setzt man z.B. $g := 2.0$ kp/cm, $l = 10^3$ cm,
$B \cdot C := 6{,}76 \cdot 10^{18}$ kp² cm⁴ , so erhält man:

n	$\tilde{\lambda}_1$ mit DISKK	$\tilde{\lambda}_1$ mit DISKQ
10	9812.09	9876.23
30	9835.48	9851.71
50	9840.89	9849.78
70	9843.28	9849.25
90	9844.53	9849.03
100	9844.96	9848.96

Offenbar liegt auch hier Monotonie vor, wie man sie im entsprechenden, im λ linearen, Fall leicht nachweisen kann. Die Rechnungen von PRANDTL [18,p.50] liefern (im wesentlichen durch Reihenentwicklung) für die Knicklast näherungsweise den Wert 9851 [kp].
Während man sich bei der von PRANDTL angegebenen Lösung auf Werte mit der Eigenschaft $g \cdot l \cdot (\lambda_1)^{-1} \leq 0.3$ beschränken muß, damit gute Reihenkonvergenz vorliegt, arbeitet das hier vorgeschlagene Verfahren ohne derartige Einschränkungen. Im Gegensatz zum verallgemeinerten Abschnittsverfahren von P.H.MÜLLER und H.KUMMER [15] ist man bei unserem Vorgehen nicht gezwungen geeignete Ansatzfunktionen aufzufinden, wenn sich die Art der Belastung ändert.

Literaturverzeichnis

Monographien

[1] KRASNOSEL'SKII, M.A., Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Pergamon Press 1964

[2] KATO, T., Perturbation Theory for Linear Operators. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag 1966

[3] NIRENBERG, L., Functional Analysis, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences

[4] YOSIDA, K., Functional Analysis, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123 (2nd Printing Corrected), Springer-Verlag 1966

[5] ZAANEN, A.C., Linear Analysis, North-Holland Publishing Co. - Amsterdam 1964

[6] FADDEJEW, D.K., Numerische Methoden der linearen Algebra, Oldenbourg 1964

[7] PIMBLEY, G.H.Jr., Eigenfunction Branches of Nonlinear Operators, and their Bifurcations. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1969

[8] GANTMACHER, F.R., KREIN, M.G., Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme, Akademie-Verlag, Berlin 1960

[9] Gohberg, I.C., Krein, M.G., Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. Translation of Mathematical Monographs, Volume 18, 1969

Z e i t s c h r i f t e n a r t i k e l

[10] Borisovič, Ju.G., Drehung eines schwach stetigen Vektorfeldes. Trudy Tbilissk.mat.Inst.Razmadze 27, (1960) 27-42

[11] Hadeler, K.P., Ober Operatorgleichungen mit nicht linear auftretendem Parameter. ZAMM 47 (1967) 91-96

[12] Hadeler, K.P., Eigenwerte von Operatorpolynomen. Arch.Rat.Mech.Anal. 20, (1965) 72-80

[13] Hämmerlin, G., Ein Ersatzkernverfahren zur numerischen Behandlung von Integralgleichungen 2. Art. ZAMM 42 (1962) (439-463)

[14] Kluge, R., Zur Existenz und Realisierungsweise von Bifurkationselementen, MN 42, (1969), 173-192

[15] Müller, P.H., Kummer, H., Zur praktischen Bestimmung nichtlinear auftretender Eigenwerte. Anwendung des Verfahrens auf eine Stabilitätsuntersuchung (Kipperscheinung). ZAMM 40, (1960), 136-143

[16] Müller, P.H., Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = o$. Arch. Math. XII, (1961), (307-310)

[17] PRANDTL, L., Kipp-Erscheinungen. Ein Fall von instabilem Gleichgewicht, Diss. München 1899

[18] WEYL, H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Hohlraumstrahlung) Math. Ann. 71 (1912), 441-479

L e b e n s l a u f

Am 28.5.1943 wurde ich, Walter R. Richert, als Sohn des Dekorationsmalers Robert Richert und seiner Ehefrau Anna Richert, geb. Dressel, in München geboren. Von 1949 bis 1954 besuchte ich die Volksschule in Indersdorf. Das erste Jahr der Oberschule verbrachte ich an der Zweigstelle Dachau der Ludwig-Oberrealschule München. Die weiteren Klassen bis zum Abitur im Jahr 1963 absolvierte ich an der Klenze-Oberrealschule München. Mit Beginn des Wintersemesters 1963/64 studierte ich Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München, wo ich 1969 die Diplomhauptprüfung für Mathematiker naturwissenschaftlicher Richtung ablegte. Von da ab war ich bis Ende 1969 als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut angestellt. Seit diesem Zeitpunkt bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München.